DIE VERFORMUNGSANALYSE SCHLAGARTIG BELASTETER ORTHOTROPER PLATTEN

DOKTORARBEIT

zur

Erlangung des Grades

Doktor-Ingenieur

der

Abteilung für Maschinenbau

der Ruhr-Universität Bochum

von

REINHARD STREUBEL

geb. in Burkhardtsdorf

Bochum 1982

UNIV.
LONDON
COLL.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547222_0042

DIE VERFORMUNGSANALYSE SCHLAGARTIG BELASTETER ORTHOTROPER PLATTEN

DOKTORARBEIT

zur

Erlangung des Grades

Doktor-Ingenieur

der

Abteilung für Maschinenbau

der Ruhr-Universität Bochum

von

REINHARD STREUBEL

geb. in Burkhardtsdorf

Bochum 1982

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Assistententätigkeit am Institut für Mechanik (Experimentelle Mechanik) der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Abteilung für Maschinenbau als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr. rer. nat. H. Schwieger danke ich für die Anregung und Unterstützung der Arbeit sowie für die Übernahme des Referats. Ebenso gilt mein Dank Herrn Prof. Dr.-Ing. Th. Lehmann und Herrn Prof. Dr.-Ing. F. Baumgart für die Übernahme der Korreferate.

Weiterhin danke ich den Mitarbeitern der Arbeitsgruppe für Experimentelle Mechanik, die durch ihre Unterstützung bei der Versuchsdurchführung zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben.

Referenten:
Prof. Dr. rer. nat. Horst Schwieger
Prof. Dr.-Ing. Theodor Lehmann
Prof. Dr.-Ing. Frank Baumgart

Doktorarbeit eingereicht am: 08.09.1981
Tag der mündlichen Prüfung: 05.02.1982

Zusammenfassung

Diese Arbeit behandelt die Untersuchung des dynamischen Verhaltens schlagartig belasteter Platten mit konstruktiv bedingter Orthotropie. Eine vereinfachte Theorie des elastischen Biegestoßes einer kugelförmigen Masse auf eine orthotrope Platte wird dargestellt und am Beispiel einer Rippenplatte experimentell überprüft.
Im Sinne einer bequemen praktischen Handhabung werden zunächst die analytischen Lösungen für die Durchbiegung und Krümmung der Platte unter dem Stoßpunkt durch leicht berechenbare Ausdrücke ersetzt. Es zeigt sich, daß während der zeitlich frühen Belastung der Platte (jener Zeitraum, in dem die am Plattenrand reflektierten elastischen Biegewellen den Verformungszustand an der Stoßstelle noch nicht merklich beeinflussen) die Plattendurchbiegung unter dem Stoßpunkt annähernd proportional zum Zeitintegral über die Stoßkraft ist.
Mit diesem experimentell überprüften Zusammenhang, mit dem Hertzschen Kontaktkraftgesetz und mit der Bewegungsgleichung der Stoßmasse läßt sich eine nichtlineare Differentialgleichung für die Stoßkraft ableiten und daraus insbesondere die maximale Stoßkraft für bestimmte Stoßgeschwindigkeiten berechnen. Durch piezoelektrische Messung der Stoßkraftverläufe werden die theoretisch ermittelten Werte weitgehend bestätigt.
Darüberhinaus wird die spätere Kontaktwechselwirkung der Stoßpartner unter Variation der Stoßparameter untersucht, wobei sich besonders in Abhängigkeit von der Kugelmasse charakteristische Stoßabläufe ergeben.
In umfangreichen Stoßversuchen werden mit elektrischen Methoden bei verschiedenen Stoßbedingungen Stoßkräfte, Plattendurchbiegungen, Axialdehnungen und die Grundeigenfrequenz der allseitig eingespannten Rippenplatte gemessen.
Mittels der Impulsholographie werden einzelne Deformationsphasen der gestoßenen Platte als Momentaufnahmen festgehalten, wodurch die zeitliche Entwicklung der Plattendurchbiegung flächenhaft erfaßt und die Ausbreitung elastischer Biegewellen sichtbar gemacht wird. Der Versteifungseffekt der Rippen wird durch den örtlichen Verlauf der Interferenzstreifen deutlich. - Spannungsoptische Versuche an einem Rippenbalken sollen zum Verständnis des unsymmetrischen Schwingungsverhaltens der Rippenplatte beitragen.

Inhalt

		Seite
Formelzeichen		6
1.	Einleitung	11
2.	Bemerkungen zur Theorie der orthotropen Platten	15
2.1	Elastisches Werkstoffverhalten	15
2.2	Anisotropie und Orthotropie	16
2.3	Natürliche und strukturbedingte Orthotropie	16
2.4	Idealisierende Annahmen und Voraussetzungen	17
2.5	Schwingungsdifferentialgleichung der orthotropen Platte	17
2.6	Anmerkungen zu den Biegesteifigkeiten orthotroper Platten	21
3.	Vereinfachte Darstellung der zentralen Plattendurchbiegung im Frühstadium	26
4.	Gegenseitige Annäherung der Stoßpartner und Differentialgleichung für die Stoßkraft	34
5.	Kontaktwechselwirkung der Stoßpartner	38
6.	Vereinfachte Darstellung der Krümmungen	40
7.	Versuchsaufbau und angewendete Meßverfahren	46
7.1	Auswahl der Versuchsplatte	46
7.1.1	Werkstoff	46
7.1.2	Abmessungen	46
7.1.3	Konstruktive Gestaltung	47
7.2	Versuchsanordnung	48
7.3	Stoßkraftmessung	51

7.4	Kontaktzeit und Triggerung	52
7.5	Zentrale Plattendurchbiegung	53
7.6	Gleichzeitige Messung der Stoßkraft und Durchbiegung	54
7.7	Axialdehnungen	55
7.8	Eigenfrequenz	57
8.	Interferenzoptische Erfassung einzelner Durchbiegungsstadien und der Biegewellenausbreitung mittels der Impulsholographie	58
8.1	Zielsetzung	58
8.2	Allgemeines	59
8.3	Prinzip der Holographie	60
8.4	Holographische Kamera	61
8.5	Steuerung der Laserimpulse	64
8.6	Auswertung der holographischen Aufnahmen	66
9.	Spannungsoptische Untersuchungen an einem Schnittmodell	70
10.	Besprechung der Ergebnisse und Schlußbetrachtung	73
10.1	Allgemeines	73
10.2	Plattendurchbiegung	74
10.3	Biegesteifigkeiten	75
10.4	Stoßkraft	75
10.5	Krümmungen	75
10.6	Versuche	76
10.7	Ausblick	80
11.	Schrifttum	81
12.	Bilder und Tabellen	86

Formelzeichen

a	Seitenlänge der quadratischen Rippenplatte
a,b	Seitenlänge einer Rechteckplatte
a_c	Abstand zwischen zwei Rippen
a_s	halbe Rippenbreite
a_x, a_y, a_z	Beschleunigungen eines Festkörperelements in den Koordinatenrichtungen x,y,z
A,B,C	Eigenfrequenzkoeffizienten
A_{ges}	Schnittfläche eines charakteristischen Elements
$A_{mn}(t)$	Amplitudenfunktionen
b_1	Rippenbreite
b_2	Nutbreite
c_x, c_y	Biegewellengeschwindigkeiten in den x- bzw. y-Richtungen
c_{Ph}	Phasengeschwindigkeit der Biegewellen mit kleiner Wellenlänge in einer isotropen Platte
D	Biegesteifigkeit einer isotropen Platte
D_k	Torsionssteifigkeit einer orthotropen Platte
D_x, D_y	Biegesteifigkeiten einer orthotropen Platte in den x- bzw. y-Richtungen
$2D_{xy}$	effektive Torsionssteifigkeit ($= 2D_x \nu_{yx} + 4D_k$)
E_P	Elastizitätsmodul des isotropen Plattenmaterials
E_S	Elastizitätsmodul des Stoßmassenmaterials
E_x, E_y	richtungsabhängige Elastizitätsmoduli einer Platte mit natürlicher Orthotropie
f	Objektivbrennweite
f_{11}	berechnete Grundfrequenz der Platte
f_{exp}	experimentell ermittelte Grundfrequenz
$F(t)$	zeitlicher Stoßkraftverlauf
F_o	Stoßkrafthöhe bei Rechteckbelastung

F_{st}	statische Einzellast bei spannungsoptischen Versuchen
F_{max}	maximale Stoßkraft
$\dot{F}$	dF/dt
g	Erdbeschleunigung
G	Schubmodul der isotropen Platte
G_{xy}	Schubmodul der orthotropen Platte
h	Plattendicke, allgemein
h_1	Dicke der Grundplatte
h_2	Plattendicke einschließlich Rippe
h_x, h_y	angenommene effektive Plattendicke bezüglich des Energietransports der Biegewellen in x- und y-Richtung
$\bar{h}$	mittlere Dicke der Rippenplatte
I	Wert des uneigentlichen Integrals bei der Herleitung der Plattenkrümmung
I_o	Strom durch einen Dehnungsmeßstreifen (DMS)
I_x	bezogenes Flächenträgheitsmoment 2. Ordnung senkrecht zur x-Achse
I_y	bezogenes Flächenträgheitsmoment 2. Ordnung senkrecht zur y-Achse
k_g	k-Faktor eines DMS
K_1, K_2, K_3	Hertzsche Konstanten für verschiedene Kugelradien
K_x, K_y	Krümmungen in den x- bzw. y-Richtungen
K_{xo}, K_{yo}	Plattenkrümmungen unter dem Stoßpunkt
L	Lagrangesche Funktion
m, n	Ordnungszahlen der Plattenschwingungen
m', n'	transformierte Ordnungszahlen der Plattenschwingungen
m_{S1}, m_{S2}, m_{S3}	Stoßmassen
M_x, M_y	Biegemomente
M_{xy}, M_{yx}	Torsionsmomente

N	Ordnungszahlen der dunklen Interferenzstreifen
$q(x,y,t)$	Flächenlast
q_α	generalisierte Koordinaten
Q	Querempfindlichkeit eines Dehnungsmeßstreifens
Q_x, Q_y	Querkräfte
Q_α	generalisierte Kräfte
r_K	Hertzscher Kontaktradius
r_P	Krümmungsradius der Plattenoberfläche am Stoßort ($r_P \to \infty$)
r_{S1}, r_{S2}, r_{S3}	Radien der Stoßmassen
R_o	Widerstand eines DMS im unbelasteten Zustand
s	Schnittlänge eines charakteristischen Plattenelements ($= a_c + 2a_S$)
s_{ij}	Konstanten des anisotropen Plattenmaterials
s_x, s_y	Halbachsen des holographischen Interferenzmusterovals
S	Wert des Integrals über die Eigenfrequenzausdrücke in der Durchbiegungsbeziehung
t, t'	Zeitveränderliche
t_o	Zeitkonstante
T_R	Referenzzeit
T_e	Impulsdauer
T_F	Dauer des Frühstadiums
T_K	Kontaktzeit
T_{K1}	Dauer des ersten Kontaktes
T_V	Signalverzögerungszeit
T	kinetische Energie der Platte
u, v	Verschiebungen in x- bzw. y-Richtung
U	Verformungsenergie der Platte
v_o	Stoßgeschwindigkeit
V	Plattenvolumen, allgemein

V_P	Volumen der Versuchsplatte
w	Schwerpunktsverschiebung der Stoßmasse nach ihrem Aufschlag (t=0)
$\dot{w}$, $\partial w/\partial t$	Geschwindigkeit der Stoßmasse
$\ddot{w}$, $\partial^2 w/\partial t^2$	Beschleunigung der Stoßmasse
W_N	Plattendurchbiegung am Orte des N-ten Interferenzstreifens
$\dot{W}$, $\partial W/\partial t$	Geschwindigkeit eines Plattenelements
$\dot{W}_o$, $\ddot{W}_o$	Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung des gestoßenen Plattenelements
$W(x,y,t)$	Durchbiegung der Plattenmittelfläche bei einer orthotropen Platte
$W(x_o,y_o,t)$	Plattendurchbiegung unter dem Stoßpunkt
$\partial W/\partial x$, $\partial W/\partial y$	Durchbiegungsgradienten in den x- bzw. y-Richtungen
$\partial^2 W_o/\partial x^2$	zentrale Plattenkrümmung in der z-x-Ebene
$\partial^2 W_o/\partial y^2$	zentrale Plattenkrümmung in der z-y-Ebene
x,y,z	Koordinatensystem der Platte (Ursprung in einem Eckpunkt der Platte)
x_o, y_o, $-\frac{\bar{h}}{2}$	Koordinaten des Stoßpunktes
α	Plattenparameter einer isotropen Platte
α_{exp}	experimentell ermittelter Plattenparameter der Rippenplatte
$\bar{\alpha}_{th}$	theoretischer Plattenparameter der Rippenplatte bei Annahme einer mittleren Plattendicke
α_B	Beobachtungswinkel zur Plattennormalen
α_E	Einfallswinkel des Objektstrahls
γ_{xy}	Schubverformung, Gleitung (= $\partial u/\partial y + \partial v/\partial x$)
δ	Annäherung der Schwerpunkte von Stoßmasse und gestoßenem Plattenelement
δA	virtuelle Arbeit
δW	virtuelle Verrückung
$\Delta U(t)$	Spannungsänderung am DMS während seiner Verformung

$\varepsilon(t)$	zeitabhängige Dehnung
$\varepsilon_{x'}$, $\varepsilon_{y'}$	Axialdehnungen in den x- bzw. y-Richtungen
ε_{xo}, ε_{yo}	Axialdehnungen unter dem Stoßpunkt
$\varkappa$	Torsionsparameter
λ	Wellenlänge des Laserlichts bei der Aufnahme (694 nm)
λ_{Na}	Wellenlänge des Natriumdampflichts (589 nm)
λ'	Wellenlänge des Laserlichts bei der Rekonstruktion (632,8 nm)
$\overline{\lambda}$	Stoßkennzahl
$\overline{\mu}$	bezogene Plattenmasse (= $\rho_P.\overline{h}$)
ν_P	Poissonsche Zahl des isotropen Plattenmaterials
ν_S	Poissonsche Zahl des Stoßmassenmaterials
ν_{xy}, ν_{yx}	Poissonsche Zahlen orthotroper Platten mit konstanter Dicke
ρ_P	Dichte des Plattenmaterials
ρ_S	Dichte des Stoßmassenmaterials
σ_x, σ_y, σ_z	Normalspannungen
$\sigma^{1,5}$	dimensionslose Stoßkraft
$\sigma^{1,5}_{max}$	maximale dimensionslose Stoßkraft
τ	dimensionslose Zeitveränderliche
τ_{xy}, τ_{yx}	Tangentialspannungen
τ_{xz}, τ_{zx}	Querkraftschubspannungen
Θ_x	Massenträgheitsmoment senkrecht zur x-Achse
Θ_y	Massenträgheitsmoment senkrecht zur y-Achse
φ_x, φ_y	Durchbiegungsgradienten in den x- bzw. y-Richtungen (= $\partial W/\partial x$ bzw. $\partial W/\partial y$)
ω_{mn}	Eigenkreisfrequenz der Platte

1. Einleitung

Die technologische Entwicklung von Materialien und Bauteilen führte in den letzten Jahrzehnten einerseits zu einer Erhöhung der Werkstoffestigkeit, andererseits zu einer Senkung des Materialverbrauchs durch geschickte konstruktive Gestaltung. Wenn es auf hohe Festigkeiten in bevorzugten Richtungen ankommt, werden Werkstoffe verwendet, deren elastisches Verhalten richtungsabhängig ist. Solche Materialien bezeichnet man als mechanisch anisotrop. Falls die Richtungen extremaler Biegesteifigkeiten senkrecht aufeinander stehen, handelt es sich um orthogonal-anisotrope oder kurz um orthotrope Stoffe.
Rührt die Orthotropie von der physikalischen Struktur des Materials her, wie man sie z.B. in Schiefer oder gewalzten Metallplatten findet, spricht man von "natürlicher Orthotropie". Ist dagegen die physikalische Struktur des Materials isotrop, das mechanische Verhalten eines Körpers aufgrund seiner Formgebung jedoch orthotrop, handelt es sich um "konstruktive oder strukturbedingte Orthotropie". Beispiele hierfür sind: Wellblech, Rippenplatten usw.

Orthotrope Platten mit natürlicher Anisotropie können plattentheoretisch in gleicher Weise behandelt werden wie isotrope Platten. Die beiden Elastizitätsmoduli in den elastischen Hauptrichtungen, der Schubmodul und die richtungsabhängigen Poissonschen Zahlen in den Hauptrichtungen sind hier die Parameter, welche das elastische Verhalten der Platten bestimmen. Durch den Reziprozitätssatz von Betti sind die Poissonschen Zahlen und die Elastizitätsmoduli miteinander verknüpft.

Im Falle konstruktiver Orthotropie sei ein mikroskopisch richtungsunabhängiges Materialverhalten vorausgesetzt. Damit auch hier der Reziprozitätssatz seine Gültigkeit behält, wird zwar der Elastizitätsmodul als reine Materialkonstante angesehen, die Poissonsche Zahl hingegen als die vom Material wie von der Querschnittsgeometrie abhängige Größe eingeführt /9/. Nunmehr wird im Satz von Betti das Verhältnis der Biegesteifigkeiten bzw.

der Flächenträgheitsmomente 2. Ordnung dem Verhältnis der Poissonschen Zahlen gleichgesetzt. (Siehe auch Abschnitt 2.6). Die Biegesteifigkeiten konstruktiv orthotroper Platten lassen sich entweder berechnen, z.B. nach R. Szilard /3/, M.S. Troitskii /2/, K. Girkmann /4/ und A.W. Leissa /5/, oder experimentell bestimmen, etwa nach der Methode von W.H. Hoppmann und N.J. Huffington /1/. Siehe hierzu auch A. Nádai /10/ sowie R.F.S. Hearmon und E.H. Adams /11/.

In der vorliegenden Arbeit wird die Verformung schlagartig belasteter Rippenplatten untersucht. Das Verhalten transversal gestoßener orthotroper Platten ist bisher wenig behandelt worden und ist von jenem statisch beanspruchter oder harmonisch angeregter Platten verschieden.

Bereits in früheren Arbeiten z.B. von A.C. Eringen /6/ und H. Schwieger /7/, /8/ wurde herausgestellt, daß schlagartig belastete isotrope Platten kurzzeitig beachtlichen mechanischen Verformungen ausgesetzt sind, die sich analytisch nur mit einem hohen Rechenaufwand bestimmen lassen. Die Stoßpartner, im folgenden eine Stahlkugel und eine Rippenplatte, erfahren dabei eine kurze Kontaktwechselwirkung. Die beim Aufprall der Kugel wegen der starken Bremsversögerung auftretende Stoßkraft ist wesentlich größer als die Gewichtskraft der Stoßmasse selbst.
Entsprechend groß sind demzufolge auch die lokalen Verformungen. Gewöhnlich treten diese maximalen Belastungen in einem Zeitraum auf, in dem die vom Stoß verursachten und am Rand reflektierten elastischen Biegewellen die Verformung in der Nähe des Stoßortes noch nicht merklich beeinflussen. Die Dauer dieses sogenannten "Frühstadiums", das folglich von den Randbedingungen unabhängig ist, läßt sich aus der Phasengeschwindigkeit der schnellsten Biegewellen abschätzen, sofern Dichte, Geometrie und elastische Konstanten des Materials bekannt sind. Für eine isotrope Platte kann diese Geschwindigkeit aus $c_{Ph} \approx 0{,}93 \sqrt{G/\rho_p}$ [1] ermittelt werden.

---

1) Phasengeschwindigkeit für Biegewellen sehr kleiner Wellenlänge. Der Faktor 0,93 hängt von der Poissonschen Zahl des Plattenmaterials ab, die hier zu 0,34 angenommen wurde.

Im Falle anisotroper Media sind die Phasengeschwindigkeiten richtungsabhängig, und deren Berechnung kann besonders bei konstruktiver Anisotropie aufwendig sein. Bei der untersuchten Rippenplatte konnten holographische Aufnahmen einen gewissen Einblick in die Biegewellenausbreitung vermitteln (Kap. 8).

Als Teilziel dieser Arbeit soll festgestellt werden, ob der für isotrope Platten z.B. von H. Schwieger /7/, /8/ und C. Zener /12/ auf unterschiedlichen Wegen gefundene Zusammenhang zwischen der Plattendurchbiegung unter dem Stoßpunkt und dem Zeitintegral über die Stoßkraft auch für orthotrope Platten ableitbar ist. Diese einfache Beziehung bildet den Ausgangspunkt für eine vereinfachte Stoßtheorie, die eine bequeme Abschätzung maximaler Belastungsgrößen erlaubt, wobei zunächst die oft schlecht konvergierenden unendlichen Doppelsummen in den analytischen Lösungen für Plattendurchbiegung und -krümmung durch leicht berechenbare Ausdrücke ersetzt werden.

Mit Hilfe des Kontaktkraftgesetzes von H. Hertz /13/, der einfachen Beziehung für die Plattendurchbiegung und der Bewegungsgleichung der Stoßmasse läßt sich dann eine nichtlineare Differentialgleichung für die Stoßkraft ableiten, deren numerische Lösung für verschiedene Stoßmassen und Stoßgeschwindigkeiten entsprechende zeitliche Stoßkraftverläufe und insbesondere die maximalen Stoßkräfte liefert.

Die hier vorgestellte vereinfachte Theorie der schlagartig belasteten orthotropen Platten ist sowohl bei natürlicher als auch bei konstruktiv bedingter Orthotropie anwendbar, sofern sich die richtungsabhängigen Biegesteifigkeiten nicht wesentlich voneinander unterscheiden. Die Stoßkraft kann einen beliebigen zeitlichen Verlauf haben; Bedingung ist jedoch, daß die maximale Belastung innerhalb des oben definierten Frühstadiums liegt, die Verformung elastisch bleibt und die Berührungswechselwirkung den Bedingungen des Hertzschen Kontaktkraftgesetzes genügt.

Ein umfassender praktischer Einblick in das Deformationsverhalten schlagartig belasteter orthotroper Platten wird im zweiten Teil

dieser Arbeit gewonnen, wo mit Methoden der experimentellen Mechanik umfangreiche Versuche zur Ermittlung des zeitlichen Stoßkraftverlaufs, der Kontaktzeit, der zentralen Plattendurchbiegung, der Axialdehnung und der Grundeigenfrequenz durchgeführt werden. Hierzu dient als Beispiel für eine Platte mit konstruktiver Orthotropie eine Rippenplatte aus Duraluminium, die von Stahlkugeln verschiedener Massen unter Variation der Anfangsgeschwindigkeit transversal gestoßen wird.

Die benutzten elektrischen Methoden erlauben nur eine punktweise Erfassung der Meßgrößen. Nun kann man sich aber vorstellen, daß orthotrope Platten, besonders solche mit konstruktiver Anisotropie, bei der schlagartigen Belastung interessante räumliche Durchbiegungsprofile entwickeln. In einem weiteren Teil der Arbeit wird daher das Ziel verfolgt, mit Hilfe eines interferenzoptischen Verfahrens die Plattendurchbiegung flächenhaft in ihrem zeitlichen Verlauf zu erfassen. Zur optischen Registrierung einmaliger schnellablaufender Vorgänge ist besonders die holographische Doppelblitztechnik geeignet. Mit diesem sowohl hinsichtlich des physikalischen Hintergrundes als auch der praktischen Anwendbarkeit attraktiven Verfahren, dessen Verständnis und Handhabung allerdings eine vertiefende Einarbeitung erfordert, wurden einzelne Stadien der Plattenverformung flächenhaft erfaßt. Durch eine Sequenz von Momentaufnahmen mit unterschiedlicher Zeitverzögerung nach dem Verformungsbeginn läßt sich der Deformationsvorgang analysieren. Man erhält hierbei ein System von Interferenzstreifen hoher Dichte, die sich etwa mit den Höhenschichtlinien auf topographischen Karten vergleichen lassen. Die Empfindlichkeit des hier gewählten Verfahrens liegt bei $0{,}35 \cdot 10^{-6}$ m; ein hohes optisches Auflösungsvermögen wird durch geeignete Techniken bei der Aufnahme des Hologramms und bei der Rekonstruktion der ursprünglichen Wellenfelder des Objekts erreicht. Die Interpretation der holographischen Ergebnisse zielt darauf ab, neben der zentralen Plattendurchbiegung im erwähnten Frühstadium Aufschluß über das ortsabhängige Durchbiegungsprofil in seinem zeitlichen Verlauf zu erhalten, wobei besonders der Einfluß der Versteifungsrippen von Interesse ist. Darüber hinaus sollen die richtungsabhängigen Phasengeschwindigkeiten der schnellsten Biegewellen

ermittelt werden, die mit den Biegesteifigkeiten im Zusammenhang stehen.

Schließlich werden spannungsoptische Untersuchungen an einem Schnittmodell aus Epoxydharz durchgeführt. Als Modell wird ein zentral statisch belasteter "Rippenbalken" verwendet. Die Versuche sollen zum Verständnis der Frage beitragen, inwieweit das dynamische Verhalten der Rippenplatte von der Belastungrichtung abhängt, d.h., ob die Platte vertikal auf eine Rippe oder auf die ihr gegenüberliegende ebene Seite gestoßen wird.

In Abschnitt 10 werden die Ergebnisse besprochen, Vergleiche zwischen theoretischen und experimentell ermittelten Werten gezogen, sowie einige Bemerkungen zu den Grenzen der benutzten Verfahren gemacht.

2. Bemerkungen zur Theorie der orthotropen Platten

Zur späteren Beschreibung der Plattenverformung an der Stoßstelle wird zunächst eine Differentialgleichung benötigt, die das Schwingungsverhalten orthotroper Platten charakterisiert. Bevor in diesem Abschnitt eine solche Gleichung angegeben wird, folgen einige Bemerkungen über orthotrope Platten allgemein und über die hier gemachten Voraussetzungen und Einschränkungen.

2.1 Elastisches Werkstoffverhalten

Sowohl bei den theoretischen Überlegungen als auch bei den praktischen Stoßversuchen wird davon ausgegangen, daß das Werkstoffverhalten linear-elastisch sei und damit physikalisch gesehen dem Hookeschen Gesetz gehorcht. Es wird weiter angenommen, daß das Material homogen sei. Besitzt ein Material identisches elastisches Verhalten in allen Richtungen, wird es isotrop genannt. Physikalisch gesehen sind zwar die meisten Werkstoffe aus verschieden gearteten Kristallen aufgebaut, deren Ausrichtung und elastisches

Verhalten in allen Richtungen unterschiedlich ist. Da aber die Kristalle im Vergleich zu gewöhnlichen Bauteilen sehr klein sind, dürfen wir annehmen, daß das elastische Verhalten eines Materialstücks makroskopisch als mittleres elastisches Verhalten einzelner Kristalle aufzufassen ist und sich das Material näherungsweise isotrop verhält.

2.2 Anisotropie und Orthotropie

In vielen modernen Konstruktionen aus den Bereichen des Brücken-, Flugzeug- und Schiffsbaus werden Materialien verwendet, die sehr unterschiedliches elastisches Verhalten in verschiedenen Richtungen haben können. Hierbei handelt es sich um anisotrope Materialien. Besitzt ein Körper in zwei zueinander senkrechten Richtungen minimale bzw. maximale Biegesteifigkeiten, wird er orthogonal-anisotrop oder kurz orthotrop genannt. Während isotrope Körper nur zwei voneinander unabhängige Elastizitätskonstanten (Elastizitätsmodul E_p, Poissonsche Zahl ν_p) haben, kann die Anzahl der unabhängigen Elastizitätskonstanten bei anisotropen Körpern beachtlich höher sein (Siehe hierzu Abschnitt 2.5, Hookesches Gesetz.).

2.3 Natürliche und strukturbedingte Orthotropie

Falls die Orthotropie eines Körpers von der physikalischen Struktur seines Materials herrührt, etwa von der bevorzugten Ausrichtung der Kristalle oder Moleküle, spricht man von "natürlicher Orthotropie". Diese Eigenschaft findet man z.B. bei Schiefer, Holz oder gewalzten Metallplatten. (Bei Holz ist der Elastizitätsmodul in Faserrichtung wesentlich höher als jener senkrecht dazu.) Ist dagegen die physikalische Struktur des Materials isotrop, das gesamte Verhalten eines Körpers aufgrund seiner Formgebung jedoch orthotrop, spricht man von "konstruktiver oder strukturbedingter Orthotropie". Beispiele hierfür sind: Wellblech, spezielle Flächentragwerke und Rippenplatten.

2.4 Idealisierende Annahmen und Voraussetzungen

Häufig macht die mathematische Lösung mechanischer Probleme eine Idealisierung erforderlich. So kommt man auch bei der Behandlung des Deformationsverhaltens schlagartig belasteter Rippenplatten nicht ohne Einschränkungen aus. In der folgenden Analyse wird eine dünne orthotrope Platte nach Bild 5 unterstellt, die den Bedingungen der klassischen Biegetheorie der querbelasteten Platten von Kirchhoff genügt. Es wird vollkommen elastisches anisotropes Plattenmaterial vorausgesetzt und zunächst angenommen, daß es sich um eine orthotrope Platte konstanter Dicke $\overline{h}$ handle, in deren Mittelebene die x-y-Koordinatenebene liege und deren richtungsabhängige Biegesteifigkeiten mit jenen der Rippenplatte identisch seien. Die Spannungsverteilungen bzw. Momente an einem Schnittelement findet man in Bild 3 bzw. Bild 4.

2.5 Schwingungsdifferentialgleichung der orthotropen Platte

Ausgehend vom allgemeinen Hookeschen Gesetz für den 3-dimensionalen anisotropen elastischen Körper, siehe z.B. A.S. Saada /16/, S.G. Lechnitzkii /14/ oder C. Schaefer und M. Päsler /15/, werden die Dehnungs-Spannungsbeziehungen für die dünne orthotrope Platte in Anlehnung an die einfache Plattentheorie angegeben, wobei hier die Wirkungen der Querkraftschubspannungen und der Normalspannungen in z-Richtung vernachlässigt sind.

Diese lauten

$$\varepsilon_x = s_{11}\,\sigma_x + s_{12}\,\sigma_y + s_{16}\,\tau_{xy}$$

$$\varepsilon_y = s_{21}\,\sigma_x + s_{22}\,\sigma_y + s_{26}\,\tau_{xy}$$

$$\gamma_{xy} = s_{61}\,\sigma_x + s_{62}\,\sigma_y + s_{66}\,\tau_{xy} \quad ,$$

mit $s_{ij} = s_{ji}$, $i \neq j$.

s_{ij} sind Materialkonstanten, und zwar

$$s_{11} = 1/E_x \; ; \; s_{22} = 1/E_y \; ;$$

$$s_{12} = -\nu_{yx}/E_y \; ; \; s_{21} = -\nu_{xy}/E_x \; ; \; s_{66} = 1/G_{xy} \; .$$

Bei ν_{yx} bzw. ν_{xy} bedeutet der erste Index die Richtung der betrachteten Verformung und der zweite Index die Richtung der zugehörigen Querdehnung. Es läßt sich z.B. nach R.F.S. Hearmon und E.H. Adams /11/ zeigen, daß die Größen s_{16}, s_{26} bzw. s_{61}, s_{62} in den Gln.(1) für den vorliegenden Fall verschwinden, in dem die kartesischen Koordinaten x,y mit den elastischen Hauptrichtungen (Richtungen extremaler Biegesteifigkeiten) zusammenfallen.Dann lassen sich die Gln.(1) nach den Spannungen wie folgt umstellen:

$$\sigma_x = \frac{E_x}{1 - \nu_{xy} \cdot \nu_{yx}} \left\{ \varepsilon_x + \nu_{yx} \cdot \varepsilon_y \right\}$$

$$\sigma_y = \frac{E_y}{1 - \nu_{xy} \cdot \nu_{yx}} \left\{ \varepsilon_y + \nu_{xy} \cdot \varepsilon_x \right\} \qquad (2)$$

$$\tau_{xy} = G_{xy} \cdot \gamma_{xy} \quad .$$

Setzt man noch die Dehnungs-Krümmungs-Beziehungen

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= - z \cdot \partial^2 w / \partial x^2 \\ \varepsilon_y &= - z \cdot \partial^2 w / \partial y^2 \\ \gamma_{yx} &= - 2z \cdot \partial^2 w / \partial x \partial y \end{aligned} \qquad (3)$$

in die Gln.(2) ein und benutzt die oberste der folgenden Integralbeziehungen

$$(M_x, M_y, M_{xy}=M_{yx}) = \int_{-\bar{h}/2}^{\bar{h}/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}=\tau_{yx}) \, z \, dz \qquad (4)$$

$$(Q_x, Q_y) = \int_{-\bar{h}/2}^{\bar{h}/2} (\tau_{zx}, \tau_{zy}) \, dz \, , \qquad (5)$$

erhält man die Momente

$$M_x = - D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = - D_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \qquad (6)$$

$$M_{xy} = - 2D_k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad ,$$

mit den Biegesteifigkeiten

$$D_x = \frac{E_x \bar{h}^3}{12(1-\nu_{xy}\nu_{yx})}$$

$$D_y = \frac{E_y \bar{h}^3}{12(1-\nu_{xy}\nu_{yx})} \qquad (7)$$

und der Torsionssteifigkeit

$$D_k = \frac{G_{xy} \bar{h}^3}{12} = \frac{E_x E_y}{E_x + (1+2\nu_{xy}) E_y} \cdot \frac{\bar{h}^3}{12} \qquad (8)$$

[2)]

der orthotropen Platten konstanter Dicke.

Integriert man in Anlehnung an M.S. Trotzkii /2/ die Bewegungsgleichungen für ein orthotropes Plattenelement

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho_P \cdot a_x$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \rho_P \cdot a_y \qquad (9)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \rho_P \cdot a_z$$

---

2) Den Zusammenhang zwischen dem Schubmodul G_{xy} und den Elastizitätsmoduli E_x, E_y der orthotropen Platte findet man z.B. bei K.Klöppel und M.Yamadá /17/.

über die mittlere Plattendicke $\bar{h}$, mit ρ_p als Dichte des Plattenmaterials und

$$a_x = -\frac{\partial^3 W}{\partial x \partial t^2} \cdot z \quad ; \quad a_y = -\frac{\partial^3 W}{\partial y \partial t^2} \cdot z \quad ; \quad a_z = \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$$

als den Beschleunigungen eines Punktes des Plattenelements erhält man unter Benutzung der Gln.(4) und (5) das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + Q_x &= \Theta_x \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial t^2} \\ -\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + Q_y &= \Theta_y \frac{\partial^3 W}{\partial y \partial t^2} \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= \rho_p . \bar{h} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \end{aligned} \qquad (10)$$

Θ_x und Θ_y sind die auf die Schnittlängeneinheit bezogenen Massenträgheitsmomente und q ist die Plattenbelastung in positiver z-Richtung. Differenziert man die ersten beiden der Gln. (10) nach x bzw. y und addiert sie anschließend, erhält man

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = \\ = \Theta_x \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial t^2} + \Theta_y \frac{\partial^4 W}{\partial y^2 \partial t^2} \end{aligned} \qquad (11)$$

Durch Einsetzen der dritten Gleichung von (10) in (11) ergibt sich

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big(\rho_p . \bar{h} . W - \\ - \Theta_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \Theta_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \Big) = q(x,y,t) \end{aligned} \qquad (12)$$

Setzt man noch die Momente (6) in Gl.(12) ein, erhält man schließlich die Differentialgleichung für die Schwingung ortho-

troper Platten:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \tag{13}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t^2} \left(\rho_p \cdot \bar{h}\, w - \theta_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \theta_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = q(x,y,t) \ ,$$

in der hier die Wirkung der Querkraftdeformation unberücksichtigt bleibt. Der Ausdruck $2D_{xy}$ in Gl.(13) wird "effektive Torsionssteifigkeit" genannt und beträgt

$$2D_{xy} = D_x \nu_{yx} + D_y \nu_{xy} + 4D_k . \tag{14}$$

Hier und im folgenden wird wegen der relativ geringen Rippenhöhe die effektive Torsionssteifigkeit in Anlehnung an /4/ aus dem geometrischen Mittel von D_x und D_y berechnet, also $D_{xy} = \sqrt{D_x D_y}$. In speziellen Fällen wird ein Torsionsparameter $\varkappa$ eingeführt, so daß dann $D_{xy} = \varkappa \cdot \sqrt{D_x D_y}$ ist.

Gleichung (13) ist auch bedingt für eine Rippenplatte anwendbar, jedoch eignen sich hierfür nicht die Gleichungen (7) zur Bestimmung der Biegesteifigkeiten (siehe hierzu Abschnitt 2.6).

2.6 Anmerkungen zu den Biegesteifigkeiten orthotroper Platten

Wegen der Bedeutung der Biegesteifigkeiten für die Bestimmung eines Plattenparameters $\bar{\alpha}_{th}$, mit dem aus dem Zeitintegral über die Stoßkraft die zentrale Plattendurchbiegung w_o (→ Kap.3) berechnet werden kann, soll in diesem Abschnitt etwas ausführlicher auf diese physikalischen Größen eingegangen werden.

Wir haben zu unterscheiden zwischen orthotropen Platten mit natürlicher Anisotropie und solchen mit konstruktiv bedingter Anisotropie (vgl. Abschnitt 2.3). Grundsätzlich beinhalten die Biegesteifigkeiten, die hier richtungsabhängig sind und meist für die elastischen Hauptrichtungen gesucht werden, Angaben sowohl zur

Elastizität als auch zur Querschnittsgeometrie der Platte.

Im Falle einer natürlich orthotropen Platte mit konstanter Dikke h und den richtungsabhängigen Elastizitätsmoduli E_x, E_y können die Biegesteifigkeiten in der Form von Gl.(7) angegeben werden, wo etwas allgemeiner die mittlere Plattendicke $\bar{h}$ einer strukturierten Platte verwendet wurde.

Hingegen sind diese Gleichungen nicht mehr anwendbar bei Platten mit konstantem Elastizitätsmodul E und komplizierter Querschnittsgeometrie. Um diesen Widerspruch zu lösen und um die Gültigkeit des Reziprozitätssatzes von Betti auch bei strukturierten Platten aufrecht zu erhalten, wird hier in Anlehnung an /9/ der Elastizitätsmodul E_P als reine Materialkonstante angesehen, die Poissonschen Zahlen ν_{xy} und ν_{yx} dagegen als Größen aufgefaßt, die zusätzlich von der Querschnittsgeometrie der Platte abhängig sind. Dabei sollen sich ν_{xy} und ν_{yx} zueinander verhalten wie die zu den entsprechenden Richtungen gehörenden Flächenträgheitsmomente 2. Ordnung I_x und I_y, die nunmehr statt der Ausdrücke $\bar{h}^3/12$ für die unterschiedlichen Biegesteifigkeiten verwendet werden. Damit erhält man als Biegesteifigkeiten der strukturierten Platten:

$$D_x = \frac{E_p \cdot I_x}{1 - \nu_{xy}\,\nu_{yx}} \tag{15}$$

bzw.

$$D_y = \frac{E_p \cdot I_y}{1 - \nu_{xy}\,\nu_{yx}} \,. \tag{16}$$

Für isotrope Platten mit $I_x = I_y = h^3/12$ und $\nu_{xy} = \nu_{yx} = \nu_p$ lassen sich die Gln.(15), (16)auf die bekannte Beziehung

$$D = \frac{E_p \cdot h^3}{12(1-\nu_p^2)} \tag{17}$$

zurückführen.

Nach dem Satz von Betti sind die Poissonschen Zahlen ν_{xy} und ν_{yx}

bei natürlicher Orthotropie über die Elastizitätsmoduli miteinander verknüpft; siehe z.B. /9/:

$$E_x \nu_{yx} = E_y \nu_{xy} \quad . \tag{18}$$

Bei konstruktiv bedingter Orthotropie wird die Beziehung

$$I_x \nu_{yx} = I_y \nu_{xy} \tag{19}$$

benutzt, und in beiden Fällen haben wir den Zusammenhang

$$D_x \nu_{yx} = D_y \nu_{xy} \quad . \tag{20}$$

Zur Bestimmung der Biegesteifigkeiten D_x,D_y nach den Gln.(15) und (16) ist die Kenntnis einiger Größen erforderlich, die oft nur abgeschätzt werden können. Relativ leicht ist der Elastizitätsmodul E_P durch einen Versuch an einem Probestab gleichen Materials erhältlich. Dagegen sind die Trägheitsmomente und Poissonschen Zahlen besonders für kompliziert strukturierte orthotrope Platten nur näherungsweise zu erhalten.

Verschiedene Autoren, z.B. W.H. Hoppmann und N.J. Huffington /1/ schlagen daher vor, in solchen Fällen die Biegesteifigkeiten auf direktem Wege experimentell zu bestimmen. Wegen der unpassenden Randbedingungen mußte hier auf diesen Versuch verzichtet werden. Daher wurden zur theoretischen Abschätzung der Biegesteifigkeiten folgende Wege eingeschlagen.

1. In Anlehnung an die Ausdrücke zur Bestimmung der Biegesteifigkeiten von Deckplatten bei R. Szilard /3/, wo allerdings von schmalen hohen Rippen ausgegangen wird, ergibt sich für die hier untersuchte Rippenplatte

$$D_x = \frac{E_P \cdot h_1^3}{12(1-\nu_P^2)} = 448{,}1 \text{ Nm} \quad \text{und}$$

$$D_y = \frac{E_P \cdot h_1^3}{12(1-\nu_P^2)} + \frac{E_P \cdot h_1 \left[\frac{h_2-h_1}{2} + \frac{h_1}{2}\right]^2}{(1-\nu_P^2)} + \frac{E_P \left\{2a_s (h_2-h_1)^3\right\}}{12(a_c + 2a_s)} \quad .$$

Damit ist

$D_y = 6023{,}8$ Nm.

Als effektive Torsionssteifigkeit erhält man

$D_{xy} = \sqrt{D_x D_y} = 1642{,}94$ Nm.

Erwartungsgemäß erscheint das Steifigkeitsverhältnis $D_y/D_x = 13{,}44$ zu groß.

2. Nach den Gleichungen (15) und (16) werden D_x und D_y unter Benutzung der Flächenträgheitsmomente I_x und I_y berechnet. Da die Poissonschen Zahlen ν_{xy} und ν_{yx} unbekannt sind, wird hier als erste Näherung in den Gln. (15), (16) der Ausdruck $\nu_{xy} \cdot \nu_{yx} = \nu_P^2 = 0{,}116$ gesetzt, wobei ν_P die Poissonsche Zahl des verwendeten Plattenmaterials ist.

Bestimmung von I_y (in Rippenrichtung)

Das auf die Schnittlänge bezogene Flächenträgheitsmoment 2. Ordnung I_y läßt sich mit Hilfe des Satzes von Steiner /18/ für zusammengesetzte Querschnitte wie folgt berechnen:

$$I_y = \frac{1}{a_c + 2a_s} \left(\frac{a_c \, h_1^3}{12} + z_{S1}^2 \cdot a_c . h_1 + \frac{2a_s \, h_2^3}{12} + z_{S2}^2 \cdot 2a_s . h_2 \right). \quad (21)$$

Bild 6 veranschaulicht die Formelzeichen. Man erhält auf diese Weise $I_y = 29{,}33 \cdot 10^{-9}$ m^3.

Bestimmung von I_x (quer zur Rippenrichtung)

Der Versteifungseffekt der Rippen in diese Richtung blieb zunächst unberücksichtigt, da ein spannungsoptischer Vorversuch an einem Rippenbalken-Modell aus Epoxydharz vermuten ließ, daß die Rippen bei reiner Biegung um die y-Achse nur wenig belastet wurden. Daher wurde zur Ermittlung von I_x als Plattendicke der kleinste Querschnitt ($h_1 = 4$ mm) gewählt.

Damit ist das auf die Schnittlänge bezogene Trägheitsmoment in

x-Richtung

$$I_x = \frac{h_1^3}{12} + z_{S1} \cdot h_1 = 12{,}44 \cdot 10^{-9}\ m^3 \quad . \tag{22}$$

Man erhält schließlich mit dieser Methode die Steifigkeitswerte

$$D_x = 1045{,}3\ Nm,$$

$$D_y = 2464{,}7\ Nm,$$

$$D_{xy} = 1605{,}1\ Nm$$

und ein Verhältnis von

$$D_y/D_x = 2{,}36,$$

welches gegenüber dem aus der ersten Methode vertrauenswürdiger erscheint.

3. D_y wird wie im vorigen Fall berechnet. Zur Ermittlung von D_x wird eine von Timoshenko vorgeschlagene Beziehung (Siehe M.S.Troitskii /2/), in der der Rippeneinfluß berücksichtigt, der Querkontraktionseinfluß hingegen vernachlässigt ist, herangezogen

$$D_x = \frac{E_P \cdot h_1^3}{12\left\{1 - \frac{2a_s}{a_c + 2a_s}\left[1 - \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^3\right]\right\}} \quad . \tag{23}$$

Damit ergeben sich

$$D_x = 704{,}5\ Nm,$$

$$D_y = 2464{,}7\ Nm,$$

$$D_{xy} = 1317{,}7\ Nm$$

und ein Steifigkeitsverhältnis von

$$D_y/D_x = 3{,}5 \quad .$$

Als Kriterium dafür, welche der abgeschätzten Biegesteifigkeiten für die untersuchte Rippenplatte am besten zutreffen, wird die Übereinstimmung der aus den verschiedenen Paaren D_x, D_y berechneten Grundeigenfrequenzen ω_{11} der fest eingespannten orthotropen

Platte mit der gemessenen Eigenfrequenz (Siehe Kap.7) gewählt. Nach A.W.Leissa /5/ oder R.F.S.Hearmon /19/ ist

$$\omega_{11} = \left\{ \frac{1}{\bar{\mu}} \left[\frac{A^4 D_x}{a^4} + \frac{B^4 D_y}{b^4} + \frac{C.2D_{xy}}{a^2 b^2} \right] \right\}^{0,5} \qquad (24)$$

Mit den Konstanten A = 4,73 , B = 4,73 und C = 151,3 (Grundmode), den in Kap.7 aufgeführten weiteren Plattendaten und den Biegesteifigkeiten aus der dritten Methode erhält man

$$(\omega_{11})_{theor} = 1657{,}8 \ s^{-1} \ .$$

Dieser Wert lag dem wegen der nicht exakt realisierbaren Randbedingung "fest eingespannt" ohnehin niedriger zu erwartenden Meßwert nach Bild 28

$$(\omega_{11})_{exp} = 1570 \ s^{-1}$$

am nächsten, so daß künftig mit D_x, D_y aus der dritten Methode (Timoshenko) gerechnet wird.

3. Vereinfachte Darstellung der zentralen Plattendurchbiegung im Frühstadium

Nachdem in früheren Arbeiten von z.B. J.N.Boussinesq /20/, C.Zener /12/ und H.Schwieger /7/ der Zusammenhang zwischen der zentralen Plattendurchbiegung und dem Zeitintegral über die Stoßkraft für die isotrope Platte abgeleitet wurde, soll hier aufgezeigt werden, inwieweit sich auch für eine orthotrope Platte ein solcher Zusammenhang ergibt.
Die Stoßverhältnisse sind in Bild 1 dargestellt. Eine Stoßkugel mit der Masse m_S fällt im Schwerefeld der Erde auf die Mitte einer frei drehbar gelagerten Rippenplatte. Diese Randbedingungen wurden gewählt, um einfache Eigenfrequenz- und Eigenfunktionsausdrücke zu erhalten, was später für die beabsichtigte Vereinfachung der Stoßtheorie nützlich ist. Eine Abweichung dieser Rand-

bedingungen von jenen, die bei den Experimenten zugrunde lagen, kann aber als gerechtfertigt angesehen werden, da der frühe zentrale Biegungszustand, in dem die maximale Belastung auftritt, unabhängig von den Randbedingungen ist. Zur Beschreibung der erzwungenen Plattenschwingungen wird im folgenden eine Differentialgleichung für die orthotrope Platte

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \rho_p \bar{h} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x,y,t) \qquad (25)$$

verwendet/21,22,23/, in der gegenüber Gl.(13) die Einflüsse der Rotationsträgheit und auch der Querkraftdeformation sowie andere Einflüsse auf das Schwingungsverhalten vernachlässigt sind.

Es wird angestrebt, die Lösung von Gl.(25) für eine beliebige Funktion q(x,y,t) zu finden, so daß hierfür auch reale Stoßkräfte mit beliebigem zeitlichen Verlauf einsetzbar sind.
Zur Lösung von Gl.(25) wird folgender Produktansatz als Reihenentwicklung gewählt, der die angenommenen Randbedingungen für eine frei drehbar gelagerte Rechteckplatte befriedigt:

$$w(x,y,t) = \sum_m^\infty \sum_n^\infty A_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \; . \qquad (26)$$

$A_{mn}(t)$ sind die Amplitudenfunktionen und m,n = 1,2,3 ... die Ordnungszahlen der Plattenschwingungen.
Die Ermittlung von $A_{mn}(t)$ [3] erfolgt hier mittels der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art, wofür zunächst die kinetische Energie und die Verformungsenergie der Platte benötigt werden.

---

3) Die Bestimmung der Amplitudenfunktionen $A_{mn}(t)$ erfolgt vorzugsweise mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art. Man könnte auch den Lösungsansatz (26) in Gl.(25) einsetzen. Nachdem q(x,y,t) ebenfalls in eine entsprechende Fourierreihe entwickelt wird, erhält man durch Summandenvergleich ein System von lösbaren Differentialgleichungen für $A_{mn}(t)$.

Die totale kinetische Energie T der Platte beträgt

$$T = \frac{1}{2}\int_0^a \int_0^b \bar{\mu}\,\dot{w}^2 \, dxdy, \tag{27}$$

mit

$$\bar{\mu} = \int_{-\bar{h}/2}^{\bar{h}/2} \rho_p \, dz \tag{28}$$

als flächenbezogener Plattenmasse.

Differenziert man den Produktansatz (26) nach der Zeit und setzt die Ableitung $\dot{W}$ in Gl. (27) ein, erhält man als kinetische Energie

$$T = \frac{1}{8}\,\bar{\mu}\,ab\sum_m^\infty\sum_n^\infty \dot{A}_{mn}^2(t). \tag{29}$$

Die Verformungsenergie einer elastischen Platte unter Vernachlässigung der Wirkungen von Querkraftschubspannungen und der Normalspannung in z-Richtung beträgt

$$U = \int_V (\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy}) \, dxdydz. \tag{30}$$

Durch Einsetzen der Spannungen (2) und Dehnungen (3) in Gl. (30) und anschließende Integration über die Plattendicke längs der z-Koordinate erhält man für die Verformungsenergie

$$U = \frac{1}{2}\int_A \left[D_x\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + D_y\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 4D_k\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(D_x\nu_{yx} + D_y\nu_{xy}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right] dxdy, \tag{31}$$

mit den aus (7) und (8) bekannten Steifigkeiten D_x, D_y und D_k.

Differenziert man den Lösungsansatz (26) partiell nach x bzw. y, läßt sich die Verformungsenergie der orthotropen Platten nach Integration über die Plattenfläche in der Form

$$U = \frac{1}{8}\,ab\pi^4\sum_m^\infty\sum_n^\infty \left\{ D_x\left(\frac{m}{a}\right)^4 + D_y\left(\frac{n}{b}\right)^4 + 2D_{xy}\left(\frac{mn}{ab}\right)^2 \right\} A_{mn}^2 \tag{32}$$

bzw.

$$U = \frac{1}{8}\bar{\mu}ab \sum_{m}^{\infty}\sum_{n}^{\infty} \omega_{mn}^2 . A_{mn}^2 \tag{33}$$

darstellen, mit

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2}{\bar{\mu}^{0,5}} \left\{ D_x\left(\frac{m}{a}\right)^4 + D_y\left(\frac{n}{b}\right)^4 + 2D_{xy}\left(\frac{mn}{ab}\right)^2 \right\}^{0,5} \tag{34}$$

als Eigenkreisfrequenz der frei drehbar gelagerten orthotropen Platte; siehe hierzu z.B. A.W.Leissa /5/. Setzt man die kinetische Energie (29) und die Verformungsenergie (33) in die Lagrangeschen Gleichungen 2.Art für ein nichtkonservatives mechanisches System /24/

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \tag{35}$$

ein, in denen q_α die generalisierten Lagekoordinaten und Q_α die generalisierten Kräfte bedeuten, erhält man mit der Lagrangeschen Funktion

$$L = (T-U) = \frac{1}{8}\bar{\mu}ab \sum_{m}^{\infty}\sum_{n}^{\infty} \left\{ \dot{A}_{mn}^2(t) - \omega_{mn}^2 . A_{mn}^2(t) \right\} \tag{36}$$

und mit den Festlegungen $q_\alpha = A_{mn}$ sowie $Q_\alpha = Q_{mn}$ als m,n-tes Glied eines Gleichungssystems folgenden Ausdruck

$$\frac{1}{4}\bar{\mu}ab\left\{ \ddot{A}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 . A_{mn}(t) \right\} = Q_{mn}(t) . \tag{37}$$

Diese Differentialgleichung kann in üblicher Weise mit der Methode der Variation der Konstanten /25/ unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen $Q_{mn}(0) = 0$ sowie $A_{mn}(0) = \dot{A}_{mn}(0) = 0$ gelöst werden, und man erhält:

$$A_{mn}(t) = \frac{4}{\bar{\mu}ab\omega_{mn}} \int_0^t Q_{mn}(t') \cdot \sin \omega_{mn}(t-t')\, dt' . \tag{38}$$

Die noch benötigten generalisierten Kräfte $Q_{mn}(t)$ lassen sich über die virtuelle Arbeit $\delta\mathcal{A}$ der Stoßkraft F(t) am zentralen

Massenpunkt

$$\delta \mathcal{A}\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},t\right) = F(t)\ \delta W\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},t\right) \tag{39}$$

berechnen, wobei die virtuelle Verrückung (m,n-ter Summand) bei den hier gewählten Randbedingungen

$$\delta W_{mn} = A_{mn}(t)\ \sin\frac{m\pi}{2}\ \sin\frac{n\pi}{2} \tag{40}$$

beträgt.
Da andererseits die Beziehung

$$\delta \mathcal{A} = Q_{mn}(t)\ \delta A_{mn}(t) \tag{41}$$

gilt, erhält man als generalisierte Kräfte

$$Q_{mn}(t) = F(t)\ \sin\frac{m\pi}{2}\ \sin\frac{n\pi}{2} \tag{42}$$

für die frei drehbar gelagerte Platte, in deren Mittelpunkt die Stoßkraft F(t) angreifen möge. Durch Einsetzen der Gleichungen (38) und (42) in den Produktansatz (26) gelangt man schließlich zur gesuchten Plattendurchbiegung

$$W(x,y,t) = \frac{4}{\bar{\mu}ab}\sum_{m}^{\infty}\sum_{n}^{\infty}\frac{1}{\omega_{mn}}\left[\int_0^t F(t')\cdot\sin\omega_{mn}(t-t')\ dt'\right] * \\ * \sin\frac{m\pi}{2}\ \sin\frac{n\pi}{2}\ \sin\frac{m\pi x}{a}\ \sin\frac{n\pi y}{b}\ . \tag{43}$$

Speziell gilt für die zentrale Durchbiegung einer quadratischen orthotropen Platte mit der Seitenlänge a an der Stoßstelle $x_o = y_o = a/2$:

$$W_o(t) = \frac{4}{\bar{\mu}a^2}\sum_{m}^{\infty}\sum_{n}^{\infty}\frac{1}{\omega_{mn}}\left[\int_0^t F(t')\cdot\sin\omega_{mn}(t-t')\ dt'\right]\left\{\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}\right\}^2, \tag{44}$$

mit der Eigenkreisfrequenz

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2}{\bar{\mu}^{0,5}a^2}\left\{D_x m^4 + D_y n^4 + 2D_{xy} m^2 n^2\right\}\ . \tag{45}$$

Der Rechenaufwand kann je nach Konvergenz der Reihe erheblich sein. Daher wird im folgenden angestrebt, in Anlehnung an /7/ für die orthotrope Platte die unendliche Doppelreihe durch ein uneigentliches Integral zu ersetzen, wodurch eine wesentliche Vereinfachung des Ausdrucks (44) erreicht wird. Bei Annahme einer gleichmäßigen Konvergenz kann in Gl.(44) die Reihenfolge von Summation und Integration vertauscht werden, und wir können die einzelnen Glieder der Doppelreihe für (t-t') = const. als Amplituden über einer m,n-Ebene auftragen, wie Bild 7 veranschaulicht. Nach Multiplikation dieser Amplituden mit einer Basisfläche $\Delta m \Delta n$ erhält man Volumen einzelner Quader, wobei das Gesamtvolumen aus der Summe der einzelnen Volumen nunmehr nach oben von einer Fläche bedeckt wird, die durch alle Amplituden der Quader geht. Somit wird ein Doppelintegral gebildet und dessen Wert dem Volumen aus den Quadern gleichgesetzt. Auf diese Weise erhält man mit

$$\sin^2 \frac{m\pi}{2} \sin^2 \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 \text{ für } m,n = 0,2,4 \ldots \\ 1 \text{ für } m,n = 1,3,5 \ldots \end{cases}$$

die Gleichung

$$\sum_m^\infty \sum_n^\infty \omega_{mn}^{-1} \sin\omega_{mn}(t-t')\Delta m\Delta n = \int_0^\infty \int_0^\infty \omega(m,n)^{-1} \sin\omega(t-t')\,dm\,dn, \qquad (46)$$

auf deren rechter Seite m und n nun als kontinuierliche Variablen aufzufassen sind.

Mit $\Delta m = \Delta n = 2$ ist

$$\sum_m^\infty \sum_n^\infty \omega_{mn}^{-1} \sin\omega_{mn}(t-t') = \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_0^\infty \omega(m,n)^{-1} \sin\omega(t-t')\,dm\,dn. \qquad (47)$$

Mit der weiter vorn angegebenen Beziehung $D_{xy} = (D_x\, D_y)^{0,5}$, die hier als angenähert gültig angesehen wird, läßt sich die Eigenfrequenz nach Gl.(45) in der Form

$$\omega(m,n) = \frac{\pi^2}{\bar{\mu}^{0,5}\, a^2} \left(D_x^{0,5}\, m^2 + D_y^{0,5}\, n^2\right) \qquad (48)$$

darstellen.

Durch die Substitutionen

$$m' = D_x^{0,25} m \quad \text{und} \quad n' = D_y^{0,25} n \tag{49}$$

ergeben sich als neue Integrationsvariablen

$$dm' = D_x^{0,25} dm \text{ und } dn' = D_y^{0,25} dn \quad . \tag{50}$$

Wird ferner

$$\gamma = \pi^2 a^{-2} \bar{\mu}^{-0,5} \tag{51}$$

eingeführt, erhält man als transformierte Eigenfrequenz

$$\omega(m',n') = \gamma (m'^2 + n'^2) \quad , \tag{52}$$

womit die Doppelsumme in Gl. (47) durch

$$S = \frac{0,25}{\sqrt[4]{D_x D_y}} \int_0^\infty \int_0^\infty \gamma^{-1} (m'^2 + n'^2)^{-1} * \\ * \sin \left[\gamma (m'^2 + n'^2) \cdot (t-t') \right] dm'dn' \tag{53}$$

ersetzt werden kann.

Zur Lösung des Integrals in Gl. (53) wird dieses zweckmäßigerweise zunächst in Polarkoordinaten transformiert. Man erhält dann mit

$$r'^2 = m'^2 + n'^2 \tag{54}$$

und

$$\omega(m',n') = \gamma r'^2 \tag{55}$$

$$S = \frac{0,25}{\sqrt[4]{D_x D_y}} \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty \frac{\sin \left[\gamma r'^2 (t-t') \right]}{\gamma r'} dr'd\varphi \quad . \tag{56}$$

Nach Integration über die Winkelkoordinate φ folgt zunächst

$$S = \frac{0,125\,\pi}{\sqrt[4]{D_x D_y}} \int_0^\infty \frac{\sin\left[\gamma r'^2\ (t-t')\right]}{\gamma r'}\ dr' \quad . \tag{57}$$

Die Lösung des uneigentlichen Integrals in Gl. (57) findet man in Integraltafeln, z.B. bei W.Gröbner und N.Hofreiter /26/, und man erhält als Wert des Integrals unter Verwendung von Gl. (51)

$$S = \frac{3,125.10^{-2} a^2 \bar{\mu}^{0,5}}{\sqrt[4]{D_x D_y}} \quad . \tag{58}$$

Damit ergibt sich für die Plattendurchbiegung unter dem Stoßpunkt nunmehr anstelle von Gl. (44) folgende vereinfachte Beziehung für das Frühstadium:

$$\boxed{W_o(t) = \bar{\alpha}_{th} \int_0^t F(t')dt'} \quad . \tag{59}$$

Hierbei kommt zum Ausdruck, daß die Durchbiegung unter dem Stoßpunkt auch einer orthotropen Platte dem Zeitintegral der Stoßkraft proportional ist, wie auch Bild 8 veranschaulicht. Der Proportionalitätsfaktor $\bar{\alpha}_{th}$ in Gl. (59) wird mit "Plattenparameter der orthotropen Platte" bezeichnet und errechnet sich aus

$$\bar{\alpha}_{th} = 0,125\,\bar{\mu}^{-0,5}\ (D_x D_y)^{-0,25} \quad . \tag{60}$$

Dabei wird für die bezogene Plattenmasse $\bar{\mu} = \rho_p . \bar{h}$ eine mittlere Plattendicke $\bar{h} = (h_1 + h_2)/2$ angenommen.
Für die isotrope Platte mit $D_x = D_y = D$ geht Gl. (60) über in

$$\bar{\alpha}_{th} = 0,125(\bar{\mu}\, D)^{-0,5} \quad . \tag{61}$$

Diesen Zusammenhang findet man z.B. bei H.Schwieger /7/.

Es sei aber daran erinnert, daß Gl. (59) nur innerhalb des Frühstadiums als gültig angesehen wird, in dem die am Plattenrand

reflektierten schnellsten elastischen Biegewellen noch keine Wirkung auf das Kontaktverhalten am Stoßort ausübt. Denn die benutzte Näherung für die unendliche Reihe hängt von der Zeitdifferenz (t-t') ab, die im Hinblick auf die Frühstadiumstheorie sehr klein gewählt werden sollte, also hier etwa $(t-t') \leq 150\,\mu s$. Aus Bild 9 wird ersichtlich, daß sich der Summenwert schon nach relativ wenigen Gliedern m,n dem Integralwert nähert. Es wurde hier mit $(t-t') = 10^{-4}s$, $10^{-5}s$, $10^{-6}s$ gerechnet. Andererseits wurde in Versuchen festgestellt, daß der proportionale Zusammenhang nach Gl. (59) noch über das oben definierte Frühstadium hinaus besteht. Dies ist wahrscheinlich darauf zurückzuführen, daß die reflektierten Biegewellen kurzer Wellenlänge in diesem Zeitraum noch relativ energiearm sind und keinen merklichen Einfluß auf die Durchbiegung am Stoßort haben. Somit ist der Plattenparameter in Gl. (60) unabhängig von den Längsdimensionen der Platte und die Bedingungen sind mit denjenigen einer unendlichen Platte vergleichbar.

4. Gegenseitige Annäherung der Stoßpartner und Differentialgleichung für die Stoßkraft

Im vorigen Kapitel wurde gezeigt, daß im Frühstadium des Stoßgeschehens auch bei orthotropen Platten, speziell bei einer Rippenplatte, ein linearer Zusammenhang zwischen der zentralen Plattendurchbiegung W_o und dem Zeitintegral über die Stoßkraft besteht, sofern die besprochenen Einschränkungen berücksichtigt werden. Mit der einfachen Beziehung Gl. (59), der Bewegungsgleichung der Stoßmasse und dem Hertzschen Kontaktkraftgesetz [4]

---

[4] Bei der Theorie des Stoßes von H. Hertz /13/ wird davon ausgegangen, daß allein die Vorgänge und Veränderungen in der Umgebung der Stoßstelle für den Ablauf des Stoßes verantwortlich sind. Diese Auffassung bedeutet physikalisch, daß die Kontaktzeit der Stoßpartner groß ist gegen die Laufzeit der elastischen Wellen in den Längsausdehnungen der Körper. Ferner sollen die Abplattungen klein im Verhältnis zu den Körperabmessungen sein. Mittlerweise sind auch Kontaktkraftgesetze für elastoplastisch verlaufende Kontaktwechselwirkungen in ihren Parametern bestimmt und auf den transversalen Stoß auf Balken und Platten angewendet worden /27,28/.

läßt sich nun in Anlehnung an /7/ eine dimensionslose Differentialgleichung für die Stoßkraft ableiten. Durch numerische Behandlung dieser Gleichung lassen sich für verschiedene Stoßfälle, d.h. verschiedene Kombinationen aus Stoßmasse, Stoßgeschwindigkeiten und Plattengeometrien, dimensionslose Stoßkräfte $\sigma^{3/2}$ in Abhängigkeit von einer dimensionslosen Zeit τ für verschiedene Stoßkennzahlen $\bar{\lambda}$ berechnen und insbesondere die maximalen Stoßkräfte F_{max} ermitteln.

Nach ihrem Aufschlag auf die Platte dringt die Stoßmasse bei gleichzeitiger Abplattung in die Plattenoberfläche ein, wodurch sich nach Bild 10 die Schwerpunkte von Stoßmasse und gestoßenem Plattenelement um

$$\delta = w - W_o \tag{62}$$

annähern.
Während des Kontaktes der Stoßpartner beträgt die auf die Platte gerichtete Stoßkraft

$$F(t) = - m_S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = - m_S \ddot{w} \quad . \tag{63}$$

Andererseits stehen nach dem Hertzschen Kontaktkraftgesetz die Annnäherung δ und die Stoßkraft F(t) in folgendem Zusammenhang:

$$F = K \cdot \delta^{3/2}, \tag{64}$$

mit K als Hertzscher Konstante, die sich zu

$$K = \frac{4}{3} \frac{E_S E_P}{E_S(1-\nu_P^2) + E_P(1-\nu_S^2)} \left\{ \frac{r_S r_P}{r_S + r_P} \right\}^{1/2} \tag{65}$$

berechnet.

Durch zweimalige Differentiation von Gl. (59) erhält man

$$\ddot{W}_o = \bar{\alpha}_{th} \dot{F} \ , \tag{66}$$

und unter Berücksichtigung von Gl. (62) folgt als Annäherungsbeschleunigung

$$\ddot{\delta} = \ddot{w} - \ddot{w}_o = - \frac{F}{m_S} - \bar{\alpha}_{th} \dot{F} \quad . \tag{67}$$

Durch Einsetzen von Gl. (64) und ihrer zeitlichen Ableitung in Gl. (67) hat man zunächst die Differentialgleichung

$$\ddot{\delta} + \frac{3}{2} \bar{\alpha}_{th} K \delta^{1/2} \dot{\delta} + \frac{K}{m_S} \delta^{3/2} = 0 \quad . \tag{68}$$

Um eine dimensionslose Differentialgleichung zu erhalten, werden die dimensionslosen Variablen

$$\sigma = \frac{\delta}{v_o T_R} \tag{69}$$

und

$$\tau = \frac{t}{T_R} \tag{70}$$

mit v_o als Anfangsgeschwindigkeit der Stoßmasse und T_R als noch festzulegender Referenzzeit eingeführt. Damit läßt sich die Annäherung δ bzw. deren zeitliche Ableitungen $\dot{\delta}$, $\ddot{\delta}$ wie folgt darstellen:

$$\delta = v_o T_R \sigma\left[\tau(t)\right] \tag{71}$$

$$\dot{\delta} = v_o T_R \frac{d\sigma}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = v_o \frac{d\sigma}{d\tau} \tag{72}$$

$$\ddot{\delta} = \frac{v_o}{T_R} \frac{d^2\sigma}{d\tau^2} \quad , \tag{73}$$

mit $d\tau/dt = 1/T_R$.

Nunmehr läßt sich Gl. (68) transformieren zu

$$\frac{v_o}{T_R} \frac{d^2\sigma}{d\tau^2} + \frac{3}{2} \bar{\alpha}_{th} K (v_o T_R \sigma)^{1/2} v_o \frac{d\sigma}{d\tau} + \frac{K}{m_S} (v_o T_R \sigma)^{3/2} = 0 \tag{74}$$

und umformen zu

$$\frac{d^2\sigma}{d\tau^2} + \left(\frac{K}{m_S} v_o^{1/2} T_R^{5/2} + \bar{\alpha}_{th} K v_o^{1/2} T_R^{3/2} \frac{d}{d\tau} \right) \sigma^{3/2} = 0 \quad . \tag{75}$$

Setzt man den ersten Summanden in der Klammer von Gl. (75) gleich eins, wird die Bezugszeit als

$$T_R = \left[\frac{m_S}{K\, v_o^{1/2}} \right]^{2/5} \tag{76}$$

festgelegt. Man erhält damit die nichtlineare Differentialgleichung

$$\frac{d^2\sigma}{d\tau^2} + \left(1 + \bar{\lambda} \frac{d}{d\tau}\right) \sigma^{3/2} = 0 \quad , \tag{77}$$

in der

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{\alpha}_{th}\, m_S}{T_R} \tag{78}$$

als Stoßkennzahl bezeichnet wird.

Die dimensionslosen Stoßkräfte $\sigma^{3/2}$ als Funktion der dimensionslosen Zeitveränderlichen τ für verschiedene Stoßkennzahlen $\bar{\lambda}$ erhält man in Anlehnung an /29/ durch numerische Lösung der Differentialgleichung (77).
Aus den so erhaltenen dimensionslosen Stoßkraftverläufen lassen sich insbesondere deren Maxima $\sigma_{max}^{3/2}$ entnehmen, und die maximalen Stoßkräfte sind aus

$$F_{max} = K\, (v_o T_R)^{3/2}\, \sigma_{max}^{3/2} \tag{79}$$

zu ermitteln.

In den Tabellen 1 bis 3 findet man für drei verschiedene Stoßmassen und je sieben Stoßgeschwindigkeiten die maximalen Stoßkräfte eingetragen. Den Berechnungen lagen die Gleichungen (65), (76) und (78) zugrunde. Die maximale dimensionslose Stoßkraft kann man Bild 11 entnehmen; zeitliche Verläufe der Stoßkraft $\sigma^{3/2}$ für einige Stoßkennzahlen $\bar{\lambda}$ sind in Bild 12 dargestellt (Vgl. hierzu auch die Diagramme von H.Schwieger /7/). Eine Gegenüberstellung maximaler Stoßkräfte F_{max} aus Rechnung und Experiment

in Abhängigkeit von Stoßmasse m_S und Stoßgeschwindigkeit v_o zeigt Bild 13.

Im übrigen wurde bei den Versuchen festgestellt, daß die Stoßkräfte im Frühstadium bei sonst gleichen Bedingungen unabhängig davon waren, ob der Biegestoß auf die Rippenseite oder auf die ebene Seite ausgeübt wurde.

5. Kontaktwechselwirkung der Stoßpartner

Erfahrungsgemäß treten die maximalen Belastungen der gestoßenen Platte bereits kurze Zeit nach Beginn des Stoßes auf, wobei die Stoßkraft schon bei kleinen Stoßgeschwindigkeiten wesentlich größer als das Gewicht der Stoßmasse ist. (Beispiel: Eine Stahlkugel mit einer Masse von etwa 250 g erzeugt bei einer Anfangsgeschwindigkeit von nur v_o = 1 m/s eine maximale Stoßkraft $F_{max} \approx 1000$ N, also das über 400-fache ihres Gewichts.) Es sei daran erinnert, daß sich in vielen Fällen diese frühen Kontaktvorgänge in einem Zeitraum abspielen, in dem die am Plattenrand reflektierten elastischen Biegewellen noch keinen merklichen Einfluß auf das Geschehen am Stoßort haben.

Bei einer vertiefenden Betrachtung der Stoßvorgänge, speziell auch beim Stoß auf anisotrope Körper, ist die weitere Kontaktwechselwirkung nach dem Frühstadium (hier nach ca. 150 µs) von Interesse, da je nach verwendeter Stoßmasse charakteristische Stoßkraft- und Plattendurchbiegungskurven aufgetreten sind.

Zunächst einmal unterscheidet man zwischen Mehrfachkontakten und Mehrfachstößen. Man spricht von Mehrfachkontakten, wenn aufgrund von pulsierenden Schwingungen der Kugel und des gestoßenen Plattenelements die Berührung der Stoßpartner für kurze Zeit unterbrochen wird, wobei aber die Bewegungsrichtung des Kugelschwerpunktes zunächst erhalten bleibt bis die Platte - bei den vorliegenden Versuchsbedingungen nach etwa einem Viertel ihrer Grundschwingungsdauer - die maximale Durchbiegung erreicht hat.

Die kinetische Energie der Kugel ist bis zu diesem Zeitpunkt vollständig in die Platte übertragen worden. Anschließend schiebt das zentrale Plattenelement in umgekehrter Richtung die Kugel vor sich her, bis diese - nunmehr wieder zu einem beachtlichen Teil ihrer ursprünglichen Stoßgeschwindigkeit beschleunigt - von der Platte abhebt. Diese komplizierte Wechselwirkung dauert nach Bild 15 bei den hier durchgeführten Versuchen bis zu etwa 3 ms. Im Schwerefeld der Erde kehrt dann die Kugel ihre Bewegungsrichtung nochmals um und stößt die Platte erneut. Dieser Vorgang kann sich je nach Werkstoff und Geometrie der Stoßpartner einige Male wiederholen. Hierbei handelt es sich dann um Mehrfachstöße, die ihrerseits wieder von Mehrfachkontakten begleitet sein können.

Die hier durchgeführten Versuchsreihen haben ergeben, daß eine Veränderung der Stoßgeschwindigkeit v_o bei konstanter Stoßmasse keinen Einfluß auf Anzahl und Dauer der Kontakte hat. Auch die Charakteristik der Stoßkraft- und Durchbiegungskurven bleibt davon unberührt. Dagegen wird aus Bild 14 ersichtlich, daß mit größer werdender Stoßmasse die Anzahl der Kontakte sinkt und die Dauer der ersten Kontaktzeit T_{K1} wächst, was vermutlich mit der größeren Massenträgheit zusammenhängt. Weiter fällt auf, daß für konstante Stoßgeschwindigkeiten bei einer großen Masse die erste maximale Bremsverzögerung (negative Beschleunigung) bedeutend kleiner ist als bei einer kleinen Stoßmasse. Schließlich ist zu beobachten, daß größere Stoßmassen bei wiederholtem Kontakt nochmals Annäherungsbeschleunigungen in der Größenordnung der ersten maximalen Beschleunigung erfahren. Dagegen fallen bei kleinen Massen die Beschleunigungen rasch ab.

Berechnet man nun jeweils die maximalen Stoßkräfte aus den Beschleunigungen, so stellt man fest, daß diese nahezu gleich sind und somit nicht als verantwortlich für die unterschiedlichen maximalen Plattendurchbiegungen anzusehen sind. Die Gründe hierfür sind wohl in der Größe der kinetischen Energien und der Dauer ihrer Übertragungen zu suchen.

Charakteristisch für jede Kugel ist auch der Verlauf der zen-

tralen Plattendurchbiegung, der unabhängig von der Stoßgeschwindigkeit ist. Man beobachtet bei der größten verwendeten Kugel ($m_{S3} \approx 0{,}919$ kg) einen relativ glatten Durchbiegungsverlauf, bei den kleineren Kugeln eine oder zwei Durchbiegungsspitzen, die jeweils nach Abbruch des Kontaktes auftreten. Auch die Dauer der ersten positiven Plattendurchbiegung ist deutlich von der Kugelgröße abhängig.

Im übrigen wurde beim Vergleich des Stoßes auf die verschiedenen Plattenseiten beobachtet, daß die Stoßkraftsignale im Frühstadium gleichförmig sind, im späteren Verlauf aber voneinander abweichen. Das zeitliche Auftreten neuer Kraftspitzen ist unterschiedlich und im Zusammenhang mit den Kontaktzeiten zu sehen. Beim Stoß auf die ebene Seite sind die Kontakte häufiger, aber kürzer als beim Stoß auf die Rippenseite.

6. Vereinfachte Darstellung der Krümmungen

Neben der Stoßkraft und der zentralen Plattendurchbiegung sind die Krümmungen an der Stoßstelle, die bekanntlich mit den zentralen Biegedehnungen zusammenhängen, wichtige Belastungsgrößen. Es liegt in der Natur der orthotropen Platten, daß die durch einen Biegestoß hervorgerufenen Krümmungen längs der elastischen Hauptrichtungen unterschiedlich sind, was offensichtlich mit den richtungsabhängigen Biegesteifigkeiten zu tun hat. (Bei isotropen Platten mit konstanter Biegesteifigkeit ist auch die Krümmung an der Stoßstelle richtungsunabhängig.) In diesem Kapitel soll deshalb der Einfluß der Biegesteifigkeiten auf die Krümmungen und deren Verhältnis dargestellt werden. Dazu werden zunächst vereinfachte Ausdrücke für die Krümmungen abgeleitet. Das Verfahren ist jenem ähnlich, was in Kapitel 3 zur Bestimmung des Ausdrucks für die zentrale Durchbiegung verwendet wurde. Es genügt, die Krümmung z.B. längs der y-Achse abzuleiten; die dazu orthogonale Krümmung erhält man auf analoge Weise. Da es hier nur auf die Krümmungen in unmittelbarer Nähe der Stoßstelle ankommt, soll im folgenden

$$K_{xo} = \partial^2 W_o / \partial x^2 \tag{80}$$

und

$$K_{yo} = \partial^2 W_o / \partial y^2 \tag{81}$$

gelten.

(Der in der allgemeinen Krümmungsformel /30/ vorkommende Gradient bleibt hierbei wegen $\left\{\partial W/\partial x\right\}_{x_o,y_o} = \left\{\partial W/\partial y\right\}_{x_o,y_o} = 0$ unberücksichtigt.)

Zur Herleitung von K_{yo} wird Gl.(43) zweimal partiell nach y differenziert, wobei auch hier zunächst eine mittlere Plattendicke $\bar{h}$ und damit eine mittlere bezogene Plattenmasse $\bar{\mu} = \rho_p \cdot \bar{h}$ angenommen wird.

Für die Plattenkrümmung erhält man mit a=b:

$$K_{yo} = \frac{\partial^2 W(x_o,y_o,t)}{\partial y^2} = \tag{82}$$

$$= -\frac{4}{\bar{\mu}a^2}\int_0^t F(t')\left\{\sum_m^\infty\sum_n^\infty \frac{n^2\pi^2}{a^2}\left(\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}\right)^2 \frac{\sin\omega_{mn}(t-t')}{\omega_{mn}}\right\}dt'.$$

Ersetzt man die unendliche Doppelsumme in der geschweiften Klammer von Gl.(82) durch ein uneigentliches Integral, wie es für die Durchbiegung in Kapitel 3 ausführlich beschrieben ist, erhält man nunmehr mit $\Delta m = \Delta n = 2$ das Integral

$$I = 0{,}25\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{n^2\pi^2}{a^2}\left(\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}\right)^2 \frac{\sin\omega(m,n)(t-t')}{\omega(m,n)}\,dm\,dn. \tag{83}$$

Da auch die maximalen Krümmungen im Frühstadium auftreten und somit unabhängig von den Randbedingungen sind, können die Eigenfrequenzen der freidrehbar gelagerten Platten Gln.(48) und (52) eingesetzt werden, wobei wieder $D_{xy} = (D_x D_y)^{0,5}$ gelten soll. Mit der aus Kapitel 3 bekannten Variablentransformation geht Gl.(83) über in

$$I = \frac{0{,}25\,\pi^2}{(D_x D_y)^{0{,}25} a^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{n'^2 \sin\left[\gamma(m'^2 + n'^2)(t-t')\right]}{D_y^{0{,}5}\,\gamma(m'^2 + n'^2)}\, dm'dn'. \tag{84}$$

Durch die Transformation

$$m'^2 + n'^2 = r'^2 \quad ; \quad n'^2 = r'^2 \cos^2\varphi \tag{85}$$

in Polarkoordinaten ist

$$\omega(m',n') = \gamma(m'^2 + n'^2) = \gamma r'^2 \tag{86}$$

und es folgt für das Integral

$$I = \frac{0{,}25\,\pi^2}{(D_x D_y)^{0{,}25} D_y^{0{,}5} a^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty \frac{r'^2 \cos^2\varphi}{\omega(m',n')} \sin\omega(t-t')r'\, dr'\, d\varphi, \tag{87}$$

bzw.

$$I = \frac{0{,}25\,\pi^2}{(D_x D_y)^{0{,}25} D_y^{0{,}5} a^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty \frac{\cos^2\varphi}{\gamma} \sin[\gamma r'^2(t-t')]r'\, dr' d\varphi. \tag{88}$$

Führt man die Integrationen aus, z.B. unter Verwendung der Integraltafeln von W. Gröbner und N. Hofreiter /26/ erhält man

$$I = \frac{\pi^3}{32\, a^2 \gamma^2 (D_x D_y)^{0{,}25} D_y^{0{,}5} (t-t')}\,, \tag{89}$$

und die gesuchte Krümmung unter der Stoßstelle in y-Richtung lautet schließlich

$$K_{yo} = -\frac{1}{8\pi (D_x D_y)^{0{,}25} D_y^{0{,}5}} \int_0^{t-t_o} \frac{F(t')}{t-t'}\, dt'\,. \tag{90}$$

In analoger Weise erhält man

$$K_{xo} = - \frac{1}{8\pi(D_x D_y)^{0,25} D_x^{0,5}} \int_0^{t-t_o} \frac{F(t')}{t-t'} \, dt' \tag{91}$$

als zentrale Krümmung in x-Richtung.

Zur Vermeidung einer Singularität des Integralausdrucks in den Gln.(90), (91) an der Stelle t=t' wurden bereits von H. Schwieger /7/ für den isotropen Fall Zeitkonstanten t_o verwendet, die zu einer Begrenzung des Integrationsbereichs nach oben und damit zu einem endlichen Integralwert führen. Hier wird nun die benötigte Zeitkonstante aus einer neueren Arbeit von H. Schwieger und H. Hahn /37/ aufgegriffen. Danach wird in Anlehnung an I.N. Sneddon /31/ für die Zeitkonstante der Ausdruck

$$t_o = \frac{r_K^2}{4e} \tag{92}$$

benutzt, wobei sich der Hertzsche Kontaktradius r_K /33/ für eine Rechteckbelastung $F=F_o$ (der Dauer T_e) mit $r_P \to \infty$ aus

$$r_K = \left\{ 0,75 \cdot F_o \cdot r_S \left[\frac{1-\nu_P^2}{E_P} + \frac{1-\nu_S^2}{E_S} \right] \right\}^{1/3} \tag{93}$$

berechnet.
Als Konstante e wird hier für den anisotropen Fall

$$e = \frac{(D_x D_y)^{0,25}}{\bar{\mu}^{0,5}} \tag{94}$$

gesetzt, welche für $D_x = D_y = D$ und h=const. (Isotropie) wie bei /32/ in den Ausdruck $e = (D/\bar{\mu})^{0,5}$ übergeht. Die Krümmungen lassen sich nun leicht berechnen, wenn man den zeitlichen Stoßkraftverlauf F(t) für kurze Zeitintervalle T_e durch Rechteckfunktionen gleicher Flächeninhalte ersetzt, da dann auch die Kontaktradien r_K innerhalb der jeweiligen Impulsdauer $0 < t \leq T_e$ konstant sind.

Die Krümmungen lauten dann für eine Rechteckbelastung während der Dauer des ersten Impulses T_e (Anklingeffekt) mit $F(t) = F_o$ für $0 < t \leq T_e$ wie folgt:

$$K_{xo} = - \frac{F_o}{8\pi (D_x D_y)^{0,25} D_x^{0,5}} \int_0^{t-t_o} \frac{dt'}{t-t'} = - \frac{F_o}{8\pi (D_x D_y)^{0,25} D_x^{0,5}} \ln \frac{t_o}{t} \qquad (95)$$

bzw.

$$K_{yo} = - \frac{F_o}{8\pi (D_x D_y)^{0,25} D_y^{0,5}} \ln \frac{t_o}{t} \quad . \qquad (96)$$

Während des Abklingeffektes für $t > T_e$ gilt:

$$K_{xo} = - \frac{F_o}{8\pi (D_x D_y)^{0,25} D_x^{0,5}} \ln \left(1 - \frac{T_e}{t}\right) \qquad (97)$$

bzw.

$$K_{yo} = - \frac{F_o}{8\pi (D_x D_y)^{0,25} D_y^{0,5}} \ln \left(1 - \frac{T_e}{t}\right) \quad . \qquad (98)$$

Im isotropen Fall ergeben sich aus den Gln. (95) bis (98) in Übereinstimmung mit /7/ die einfachen Beziehungen

$$K_o = - \frac{F_o}{8\pi D} \ln \frac{t_o}{t} \quad \text{bzw.} \quad K_o = - \frac{F_o}{8\pi D} \ln \left(1 - \frac{T_e}{t}\right) \quad .$$

Um sicherzustellen, daß bis zum Ende T_e der ersten Rechteckbelastung auch die maximale Krümmung erfaßt wurde, kann man den Anklingeffekt einer weiteren Rechteckbelastung dem Abklingeffekt der ersten Belastung überlagern. Die so erhaltene Krümmung darf den Wert am Ende von T_e nicht überschreiten.

Legt man die in Kap. 2 angegebenen Werte für die Biegesteifig-

keiten D_x, D_y zugrunde, erhält man aus den Gln.(95), (96) bzw. (97), (98) das Verhältnis der Krümmungen

$$\frac{K_{yo}}{K_{xo}} = \left[\frac{D_x}{D_y}\right]^{0,5} = 0,535 \quad . \tag{99}$$

Andererseits ließ sich in vielen holographischen Aufnahmen (siehe Kap.8) für verschiedene "Höhenschichtlinien" W=const. und für verschiedene zeitliche Durchbiegungsphasen ein Halbachsenverhältnis der zugehörigen ellipsenartigen Interferenzstreifen von $s_y/s_x = 1,32$ ermitteln. Denkt man sich nun die z,x- bzw. z,y-Schnittebene im "Durchbiegungsgebirge" jeweils in erster Näherung nach oben von Kreislinien begrenzt (Kreissegmente), so lassen sich für $W \ll s_y, s_x$ durch einfache geometrische Beziehungen /25/ die Krümmungsradien und daraus das Krümmungsverhältnis berechnen. Mit dieser Methode erhält man $K_y/K_x = 0,574$, womit Gl.(99) eine gewisse Bestätigung findet und die Richtigkeit des Verhältnisses der angenommenen Biegesteifigkeiten erhärtet wird.

Die Biegedehnungen unter dem Stoßpunkt lassen sich nunmehr an der jeweils gegenüberliegenden Oberfläche für isotrope Platten und orthotrope Platten mit konstanter Dicke in einfacher Weise zu

$$\varepsilon'_{xo}(t) = -\frac{h}{2} K_{xo}(t) \tag{100}$$

bzw.

$$\varepsilon'_{yo}(t) = -\frac{h}{2} K_{yo}(t) \tag{101}$$

berechnen.

Dagegen sind diese Formeln für die Ermittlung der Biegedehnungen an Rippenplatten ungeeignet, weil für deren Anwendbarkeit eine lineare Dehnungsverteilung über die Plattendicke vorausgesetzt wird. Hier ist dagegen die lokale Verteilung einzelner Dehnungskomponenten unbekannt (siehe Abschn. 7.7). Wegen ihrer mangelnden experimentellen Überprüfbarkeit sollen diese Zusammenhänge im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter verfolgt werden.

7. Versuchsaufbau und angewendete Meßverfahren

In umfangreichen Experimenten zur Ermittlung des zeitlichen Stoßkraftverlaufs, der Kontaktzeit, der zentralen Plattendurchbiegung, der Grundeigenfrequenz und der Axialdehnung als Überlagerung von Biegedehnung und Längsdehnung (siehe Abschnitt 7.7) wurde angestrebt, einen praktischen Aufschluß über das Deformationsverhalten stoßartig belasteter Rippenplatten zu gewinnen, da beispielsweise die Berechnung der Ausbreitungsgeschwindigkeiten elastischer Wellen in solchen Platten aufwendig sein kann. Die in dieser Arbeit vorgestellte vereinfachte Theorie des elastischen Biegestoßes auf eine durch Konstruktion bedingt orthotrope Platte konnte auf diese Weise überprüft werden.

7.1 Auswahl der Versuchsplatte

7.1.1 Werkstoff

Wegen der relativ hohen Festigkeit bei geringem Gewicht und guter spanender Bearbeitbarkeit wurde kalt ausgehärtetes Duraluminium AlCuMg1/F-40 gewählt.

7.1.2 Abmessungen

Hierbei war sicherzustellen, daß der Zeitpunkt der maximalen Belastung nach Stoßbeginn noch innerhalb des Zeitraums liegt, den die schnellsten Biegewellen für den Weg zum Plattenrand und nach ihrer Reflexion wieder zurück zum Stoßzentrum benötigen. Die maximale Belastung tritt erfahrungsgemäß in ähnlich gelagerten Fällen 50 µs bis 100 µs nach Stoßbeginn auf. Demnach muß der Abstand des Randes von der Plattenmitte (Stoßpunkt) mindestens $0{,}5\, c_{Ph}\, 100\mu s$ betragen. Zur Abschätzung der Phasengeschwindigkeit der schnellsten Biegewellen, also solchen mit kleinen Wellenlängen, wird zunächst diejenige für einen vergleichbaren isotropen Fall $c_{Ph} \cdot 0{,}93\sqrt{E_P/2\rho_P(1+\nu_P)}$ [5] ≈ 3000 m/s genommen, und man erhält damit einen Mindest-Randabstand von 0,15 m. Da einerseits zur

---

[5] Siehe auch Fußnote S.12

Einspannung der Platte eine massive vertikale Halterung mit einer Aufnahmefähigkeit von Platten bis zu 0,6 m x 0,6 m einschließlich Rand zur Verfügung stand, andererseits für die holographische Erfassung der Durchbiegungsphasen eine große Ausleuchtungsmöglichkeit bestand, wurde eine quadratische allseitig fest eingespannte Rippenplatte mit einer Gesamt-Seitenlänge von 0,6 m gewählt. Damit ist auch die Bedingung $h \ll a,b$ (siehe Abschnitt 2.4) erfüllt. Um Eigenspannungsfreiheit zu gewährleisten, wurde die Rippenplatte sorgfältig aus 30 mm starkem Material gefräst.

7.1.3 Konstruktive Gestaltung

Da die Orthotropie einer Platte im Prinzip natürlicher oder konstruktiver Art sein kann, wurden ursprünglich orientierende Versuche mit einer gewalzten Messingplatte (CuZn37, Kaltverformungsgrad 50%) durchgeführt. Holographische Aufnahmen haben jedoch gezeigt, daß der Orthotropiegrad dieser Platte (Verhältnis der richtungsabhängigen extremalen Elastizitätsmoduli) nur wenig über eins lag. Daher wurde eine Platte mit einseitig angeordneten Rippen nach Bild 2 gewählt und mit einer NC-Fräsmaschine aus einer dicken Hartaluminiumplatte hergestellt. Dazu wurden zunächst beide Oberflächen abgeplant, dann bis auf den Einspannrand beide Seiten um 9 mm abgetragen, so daß eine effektive Platte mit einer Fläche von 0,444 m x 0,444 m übrig blieb. Schließlich wurden in einer Koordinatenrichtung äquidistante Nuten mit einer Tiefe von 4 mm eingefräst. Die exakte Ausführung der Fräsarbeiten [6] und die enge Toleranz der einzelnen Rippenabmessungen wurden eindrucksvoll durch holographische Aufnahmen bestätigt.

Bei der Bemessung der Rippenbreite war ein gewisser Kompromiß unumgänglich. Einerseits wären im Sinne eines großen Biegesteifigkeitsverhältnisses D_y/D_x schmale hohe Rippen erwünscht gewesen, dem stand jedoch die Forderung nach einer kleinen Rotationsträg-

---

6) Die Ausführung der Fräsarbeiten wurde freundlicherweise vom Lehrstuhl für Fluidenergiemaschinen (Ruhr-Universität Bochum) übernommen.

heit des gestoßenen Rippenelements entgegen. Außerdem wird in der hier zugrundegelegten Theorie von Hertz angenommen, daß die Abplattung der Stoßmasse bzw. die Eindringtiefe im Verhältnis zu den Körperabmessungen klein sein soll und daß sich das Spannungsfeld am Stoßort dreidimensional ausbilden kann. Bei einer angenommenen Stoßkrafthöhe von $F_o \approx 2000$ N hätte man für die hier vorliegenden Versuchsbedingungen nach Gl. (93) einen Kontaktradius von $r_K \approx 1$ mm, so daß hier die Rippenbreite wie auch die Nutbreite auf 12 mm festgelegt wurde. Die geometrischen Abmessungen der Rippenplatte kann man Bild 2 entnehmen.

7.2 Versuchsanordnung

Das Schema der Versuchsanordnung wird durch Bild 16 veranschaulicht. Wie man sieht, ist die Rippenplatte in einer vertikalen Plattenhalterung fest eingespannt. Zur Verbesserung des Massenverhältnisses zwischen Rahmen und effektiver Platte ist der Rahmen mit Stahlprofilen verstärkt. Die Platte läßt sich in ihrer Halterung aus U-Profilen zur groben Justage horizontal verschieben und auch seitenvertauscht einbauen, so daß der Stoß sowohl auf die Rippenseite als auch auf die ebene Seite möglich ist.

Als Stoßmassen dienen relativ harte Stahlkugeln (100 CrMn 6) mit verschiedenen Radien, die bifiliar an Stahllitzen aufgehängt sind. Die Massen der Kugeln einschließlich der noch zu besprechenden Beschleunigungsgeber wurden sorgfältig mit einer Waage (Typ Sartorius 2257) bestimmt. Im Schwerefeld der Erde durchfallen die Kugeln Höhenunterschiede und haben nach dem Flug an der Stoßstelle bestimmte Endgeschwindigkeiten, die an einer für die entsprechende Pendellänge berechneten Winkelskala vorwählbar sind. Mit dieser Einrichtung kann der Einfluß der Stoßgeschwindigkeit und der Stoßmasse auf das Stoßgeschehen sowie die Reaktion der Platte auf den ihr erteilten Impuls untersucht werden. Für Vorversuche genügt es, die Kugeln mit der Hand festzuhalten und die Fallhöhe über einen mitgeführten Faden an der Winkelskala abzulesen, für die exakten Messungen werden die Fallhöhen mit Hilfe

eines auf die untere Kugelperipherie ausgerichteten Kathetometers kontrolliert. Die Kugeln werden in diesem Fall von einem Magnethalter festgehalten und durch Betätigung eines Schalters zum Flug freigegeben. Die Kugelaufhängung ist an einem Rundstab befestigt, der seinerseits durch Kragarme aus Kunststoff von der Platte elektrisch isoliert ist. Bei Veränderung des Kugelradius muß die Länge der Stahllitze und die horizontale Lage des Rundstabes ebenfalls geändert werden, damit die Koordinaten des Stoßpunktes konstant bleiben. Die Einstellung der Stahllitze kann mittels Spannschrauben und Schiebereiter am Rundstab vorgenommem werden.

In Vorversuchen wurden die Funktionstüchtigkeit und Genauigkeit aller im folgenden beschriebenen und erwähnten Geräte überprüft, insbesondere die Zeitbasis und Vertikalablenkung der verwendeten Oszilloskope. Die Meßverfahren werden später eigehend beschrieben; zunächst folgen die geometrischen und physikalischen Daten der Versuchsplatte und der benutzten Stoßmassen.

Rippenplatte (Duraluminium, AlCuMg1/F-40)

$b_1 = 12 \cdot 10^{-3}$ m $\qquad V_P = 1{,}193 \cdot 10^{-3}$ m^3

$b_2 = 12 \cdot 10^{-3}$ m $\qquad D_x = 704{,}53$ Nm

$h_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ m $\qquad D_y = 2464{,}70$ Nm

$h_2 = 8 \cdot 10^{-3}$ m $\qquad 2D_{xy} = 1317{,}75$ Nm

$\bar{h} = 6 \cdot 10^{-3}$ m $\qquad E_P = 7{,}431 \cdot 10^{10}$ N/m^2

$r_P = \infty$ $\qquad \bar{\mu} = 16{,}72$ kg/m^2

$s = 24 \cdot 10^{-3}$ m $\qquad \nu_P = 0{,}34$

$a = 0{,}444$ m $\qquad \rho_P = 2{,}787 \cdot 10^3$ kg/m^3

(Zur Bestimmung von D_x, D_y und D_{xy} siehe Abschnitt 2.6).

Stoßkugeln (Kugellagerstahl 100 CrMn 6)

$m_{S1} = 0{,}27168$ kg
$m_{S2} = 0{,}58836$ kg
$m_{S3} = 0{,}91935$ kg

mit Beschleunigungsaufnehmer Typ Kistler 802 B

$r_{S1} = 20{,}0 \cdot 10^{-3}$ m

$r_{S2} = 25{,}4 \cdot 10^{-3}$ m

$r_{S3} = 30{,}0 \cdot 10^{-3}$ m

$E_S = 21{,}19 \cdot 10^{10}$ N/m^2

$\nu_S = 0{,}28$

$\rho_S = 7{,}85 \cdot 10^{3}$ kg/m^3

$v_o = 0{,}250$ m/s bis $1{,}500$ m/s

Die Hertzschen Konstanten werden aus

$$K = \frac{4}{3} \frac{E_S E_P}{E_S(1-\nu_P^2) + E_P(1-\nu_S^2)} \left[\frac{r_S \cdot r_P}{r_S + r_P}\right]^{0{,}5} \qquad (102)$$

für die verschiedenen Kugeln zu

$K_1 = 1{,}1603 \cdot 10^{10}$ N/m$^{1{,}5}$ ($r_{S1} = 20{,}0 \cdot 10^{-3}$ m)
$K_2 = 1{,}3076 \cdot 10^{10}$ N/m$^{1{,}5}$ ($r_{S2} = 25{,}4 \cdot 10^{-3}$ m)
$K_3 = 1{,}4211 \cdot 10^{10}$ N/m$^{1{,}5}$ ($r_{S3} = 30{,}0 \cdot 10^{-3}$ m)

berechnet.

Der theoretische Plattenparameter für die orthotrope Platte berechnet sich mit Gl. (60) zu $\bar{\alpha}_{th} = 8{,}4207 \cdot 10^{-4}$ m/Ns.

7.3 Stoßkraftmessung

Das Schema der Stoßkraftmessung ist in Bild 17 dargestellt. An den als Stoßmassen verwendeten Stahlkugeln unterschiedlicher Radien sind gegenüber dem Stoßpunkt Quarzkristall-Beschleunigungsaufnehmer vom Typ Kistler 802 B (0,5035 pC/g) befestigt. Solch ein Beschleunigungsaufnehmer enthält ein Paket von Quarzplättchen, bei denen der Longitudinal-Piezoeffekt ausgenützt wird. An dem Quarzpaket ist eine seismische Masse befestigt, die während ihrer Beschleunigung eine Kraft auf den Quarz ausübt. Beide Teile sind im Gebergehäuse vorgespannt, so daß sowohl Beschleunigungen als auch Verzögerungen gemessen werden können. Die entstehenden Ladungsänderungen werden einem Ladungsverstärker (Kistler 5001) zugeführt und dort in proportionale elektrische Spannungsänderungen gewandelt, so daß auf dem Bildschirm eines Oszilloskopes die Aufschlagsverzögerungen abgelesen und damit die Stoßkräfte berechnet werden können. Der hier verwendete Geber hat einen Meßbereich von -20000 g bis +50000 g und eine Eigenfrequenz von 33 KHz. Ein Aufzeichnungsbeispiel eines zeitlichen Stoßkraftverlaufs findet man in Bild 15. Hierbei fällt auf, daß das Stoßkraftsignal nicht unmittelbar am Anfang des Bildschirmes, sondern verzögert aufgezeichnet wird. Der Grund liegt in der Laufzeit der elastischen Wellen zwischen dem Stoßpunkt und dem Ort des Quarzes. Bei einer Ausbreitungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen in Stahl von ca. 5000 m/s werden demnach die Stoßkraftsignale bei den verwendeten Kugeln etwa zwischen 10 µs und 15 µs zu spät registriert. Dieser Umstand wird bei der Auswertung der Stoßkraftkurven berücksichtigt.Weiter fällt auf, daß dem Nutzsignal Oberschwingungen überlagert sind, die auf Kugelpulsationen und Eigenschwingungen des Beschleunigungsaufnehmers zurückzuführen sind. Diese Oberschwingungen werden durch die Verwendung eines Tiefpaßfilters mit einer Grenzdurchlaßfrequenz von 22 KHz etwas gedämpft. Die Eigenfrequenz des Gebers 802 B von 33 KHz wird damit unterdrückt, ohne daß dadurch Flanke und Amplitude des Nutzsignals merklich beeinflußt werden. Bei den Versuchen zur Ermittlung der Stoßkraft werden variiert: Belastungsrichtung (transversal auf die

zentrale Rippe oder auf die ebene Plattenseite), Aufprallgeschwindigkeit v_o und Kugelmasse m_s. Die maximalen Stoßkräfte, die unabhängig vom Stoß auf die Rippenseite bzw. ebene Seite sind, aber hier im gewählten v_o-Bereich nahezu linear mit v_o wachsen, sind in Bild 13 aufgetragen.

7.4 Kontaktzeit und Triggerung

Die Triggerung der Zeitbasis des Oszilloskops erfolgt durch Kurzschluß, wie Bild 17 und die Bilder 18 bis 21 veranschaulichen. Im Fall der Stoßkraftmessung liegt die Kugel auf Erdpotential und die Platte an positivem Potential; im Fall der Durchbiegungsmessung liegt die Platte auf Erdpotential und die Kugel an positivem Potential. Einen Sonderfall bildet die gleichzeitige Messung von Stoßkraft und Durchbiegung, wie später erläutert wird. Sobald die fallende Kugel die Platte berührt, bricht die Spannung im unteren Zweig des Spannungsteilers zusammen, wodurch die Zeitbasis des Oszilloskops ausgelöst wird (t=0). Dieses Triggersignal wird gleichzeitig auf dem Bildschirm mitgeschrieben, so daß die Kontaktzeiten zwischen Kugel und Platte bzw. Mehrfachkontakte ablesbar sind. Sollten Mehrfachauslösungen der Zeitbasis oder eines anderen nachgeschalteten Gerätes infolge von Mehrfachkontakten unerwünscht sein, wird zwischen Spannungsteiler und Triggereingang eine monostabile Kippstufe geschaltet, wie in Bild 31 zur Steuerung des Impulslasers dargestellt ist. Dadurch gelangt jeweils nur ein Impuls an den jeweiligen Triggereingang. Die Kippstufe muß dann vor jedem neuen Versuch zurückgesetzt werden. In diesem Zusammenhang sei nochmals auf die Unterscheidung zwischen Mehrfachkontakten und Mehrfachstößen hingewiesen (siehe Kap. 5). Hier kommt es jedoch vorherrschend auf die frühzeitige Kontaktwechselwirkung an, und die Aufzeichnungen z.B. in Bild 14 zeigen, daß selbst der kürzeste vorkommende erste Kontaktzeitabschnitt $T_{K1} \approx 750$ µs noch bedeutend größer als das Frühstadium ($T_F \approx 120$ µs) ist.

7.5 Zentrale Plattendurchbiegung

Die zentrale Plattendurchbiegung wurde berührungsfrei mit einem kapazitiven Verfahren gemessen. Dazu wurde auf der Plattenrückseite unterhalb der Stoßstelle ein kapazitiver Abstandsmesser von Wayne-Kerr in einer Halterung angebracht, die sich mittels Mikrometerschraube in Richtung der Plattennormalen verstellen ließ. Je nach der zu erwartenden maximalen Durchbiegung wurden die Gebertypen MD 1 bzw. ME 1 mit einem linearen Meßbereich von 0 bis 1,25 mm bzw. von 0 bis 2,5 mm gewählt. Die dem Geber zugewendete Plattenoberfläche lag auf Erdpotential und bildete eine Kondensatorplatte, die Gebermeßfläche die andere. Die gemessenen Weg- und damit Kapazitätsänderungen wurden in durchbiegungsproportionale Spannungsänderungen umgeformt und in einem Speicheroszilloskop festgehalten, wie Bild 18 veranschaulicht. Der verwendete Meßverstärker arbeitet mit einer Trägerfrequenz von 50 KHz. Nach den bisherigen Erfahrungen ergibt sich dadurch eine Signalverzögerungszeit von 20 µs. Hinzu kommt eine Laufzeit der longitudinalen Stoßwellen von 2 bis 3 µs,so daß bei der Auswertung der Durchbiegungsoszillogramme eine Gesamtverzögerung von T_V = 23 µs zu berücksichtigen ist.

Bei den Versuchsreihen zur Bestimmung der Durchbiegung wurde insbesondere die zentrale Plattendurchbiegung im Frühstadium gemessen und den aus Gl. (59) berechneten bzw. aus interferenzholographischen Experimenten erhaltenen Werten in Bild 8 gegenübergestellt. Hierzu wurden wiederum drei verschiedene Stoßmassen und sechs verschiedene Stoßgeschwindigkeiten gewählt. Auch im Rahmen der Durchbiegungsmessungen wurde die untersuchte Rippenplatte von zwei Seiten schlagartig belastet und deren jeweilige Reaktion auf der gegenüberliegenden Seite gemessen. Neben der Durchbiegung im Frühstadium war der spätere Durchbiegungsverlauf im Zusammenhang mit der Kontaktzeit von Interesse. Siehe hierzu Bild 22 und Bild 23.
Schließlich wurde mit Hilfe der kapazitiven Methode die Grundeigenfrequenz der Platte gemessen, die wegen ihrer Bedeutung gesondert behandelt wird.

Ergänzende Durchbiegungsmessungen wurden mittels eines federnd gelagerten Kontaktstiftes durchgeführt, der statt eines kapazitiven Gebers in der Mikrometerschraube angebracht war, wie Bild 19 verdeutlicht.

7.6 Gleichzeitige Messung der Stoßkraft und Durchbiegung

Ein spezielles Anliegen dieser Arbeit ist die Überprüfung der Proportionalität zwischen der zentralen Plattendurchbiegung und dem Zeitintegral über die Stoßkraft während des Frühstadiums nach Gl.(59).
Hierzu kann man experimentell für ganz bestimmte Stoßkombinationen einzeln die Durchbiegung unter dem Stoßpunkt sowie die sie verursachende Stoßkraft messen und dann stückweise z.B. graphisch über den Stoßkraftverlauf integrieren. So erhält man diskrete Zuordnungen zwischen der Durchbiegung und dem Integral und damit den Plattenparameter α_{exp} für eine Reihe von Zeitmomenten, wie in Tabelle 4 dargestellt ist.

Für die gleichzeitige Messung dieser Größen trat meßtechnisch bislang folgendes Problem auf: Aus gerätebedingten Gründen muß für das kapazitive Durchbiegungsmeßverfahren die untersuchte Platte geerdet sein; gleichzeitig führt die sie berührende Kugel Erdpotential, so daß während des Kontaktes keine Potentialänderung und somit kein Triggern von Aufzeichnungsgeräten möglich war. Daher hat man bisher die Größen W_o und F einzeln erfaßt.

Bild 20 zeigt eine Triggerschaltung, welche die gleichzeitige Erfassung dieser Größen ermöglicht. Als Triggersignal benötigt das Oszilloskop am externen Triggereingang Tr eine Spannungsänderung von mindestens 200 mV. Für den Start der Zeitbasis des Oszilloskops kann der Kontakt Kugel-Platte ausgenutzt werden, wenn die Platte kurzfristig positives Potential hat. Für die Messung der Durchbiegung soll das Potential an der Platte nach dem Kugelkontakt wieder auf Erdpotential geschaltet werden. Im Ausgangszustand liegt an der Platte durch den Ausgang Q des Flipflops eine positive Spannung von 5 V. Mit dem Kugelkontakt wird das Potential zu Null und eine negative Flanke gelangt über den Konden-

sator an ein spezielles Bauteil (NAND-Gatter mit Schmitt-Trigger). Die sich dahinter ergebende positive Flanke startet die Zeitbasis des Oszilloskops und bewirkt, daß der Ausgang Q des Flipflops auf Null schaltet. Die Platte hat dann Erdpotential. Schaltet man den Rücksetzeingang R an Masse, ist die Schaltung wieder in ihrem Ausgangszustand.

7.7 Axialdehnungen

Zur Messung der Axialdehnungen wurden Dehnungsmeßstreifen (DMS) sowohl unter der jeweiligen Stoßstelle(Stoß senkrecht auf eine Rippe bzw. in entgegengesetzter Richtung auf die ebene Seite) als auch in äquidistanten Abständen vom Stoßpunkt auf beiden Plattenseiten längs der x- bzw. y-Achse geklebt. Verwendet wurden die Typen LY-11-0,6 von HBM (k_g= 1,88 ; R_o= 120Ω) und FCA-2-11 von Sokki Kenkyujo (k_g= 2,06 ; R_o= 120Ω), wovon die letzteren gekreuzte DMS zur gleichzeitigen zweiachsigen Dehnungsmessung sind. Die Querempfindlichkeit dieser Folien-Dehnungsmeßstreifen ist wegen der verbreiterten Schleifen so gering (Q = 0,3 %), daß auf die Korrektur des k_g-Faktors für den hier vorliegenden zweiachsigen Spannungszustand an der Plattenoberfläche verzichtet werden konnte. Die Verschaltung je zwei einfacher bzw. eines gekreuzten DMS findet man in Bild 21. Den DMS sind nach der Methode des konstanten Stromes relativ große Widerstände (5KΩ bzw. 10KΩ) vorgeschaltet, die den Strom I_o dieser Potentiometerschaltung weitgehend bestimmen. Von einer Temperaturkompensation z.B. mittels Wheatstonescher Brücken und zusätzlicher Kompensations-DMS konnte hier wegen der Schnelligkeit der Deformationsvorgänge abgesehen werden. Während der Plattenverformung treten an den DMS elektrische Widerstandsänderungen auf, die eine Veränderung der Spannungsabfälle an den DMS bewirken. Diese Spannungsänderungen $\Delta U(t)$ werden über den AC-Eingang eines Oszilloskops aufgezeichnet und zur Berechnung der Dehnung in der jeweiligen Meßrichtung der DMS mittels

$$\varepsilon(t) = \frac{\Delta U(t)}{k_g \; R_o \; I_o} \qquad (103)$$

verwendet.

Um möglichst umfangreiche Informationen zum Dehnungsverhalten der Platte zu gewinnen, wurden 18 einachsige und 16 gekreuzte DMS verschaltet, wie Bild 24 verdeutlicht. Die insgesamt 50 Signalquellen waren über abgeschirmte Leitungen mit VHF-Schraub-Stützpunkten verbunden. Von dort aus wurden jeweils zwei Signale abgegriffen und im Speicheroszilloskop (Tektronix 7623 A) aufgezeichnet. Dabei wurden zwei Differenzeinschübe (7A22) mit einer Empfindlichkeit von 10 µV pro Teilstrich verwendet. Wie auch bei anderen Meßgrößen wurden alle Dehnungsoszillogramme photographiert, um für die Auswertung nützliche Unterlagen zu haben. Bei der Dehnungsmessung ist zu beachten, daß die Meßwerte zunächst von den Axialdehnungen herrühren. Diese setzen sich einerseits aus den Biegedehnungen zusammen, die zu den Biegemomenten gehören und bei ebener Plattenmittelfläche proportional zu den vorn abgeleiteten Krümmungen sind. Andererseits überlagern sich zusätzliche Biege- und Längsdehnungen aus Einzellasteinflüssen /34/. In speziellen Fällen lassen sich diese Anteile aus Nahfeldtheorien abschätzen.

Die Dehnungsmessungen wurden nach folgenden Gesichtspunkten durchgeführt:

A. Bestimmung der Axialdehnungen unter dem Stoßpunkt für verschiedene Stoßmassen und Stoßgeschwindigkeiten sowohl für den zentralen Stoß auf eine Rippe als auch auf die gegenüberliegende Seite. Zwei Aufzeichnungsbeispiele hierzu findet man in Bild 26. Falls eine Dehnungsseparation möglich wäre, ließen sich die in den Aufzeichnungen enthaltenen Biegedehnungen unter dem Stoßpunkt den entsprechenden Biegemomenten zuordnen. Die maximalen Dehnungswerte treten kurz nach dem jeweiligen Zeitpunkt der maximalen Stoßkraft auf.

B. In Abhängigkeit von der Stoßmasse m_S und der Stoßgeschwindigkeit v_o wurden insbesondere die maximalen Dehnungen unter dem Stoßpunkt bestimmt. Einige Ergebnisbeispiele sind in Bild 27 dargestellt.

C. Durch die Verwendung gekreuzter DMS wurden die Dehnungen in x- und y-Richtung gleichzeitig gemessen; (siehe z.B. Bild 25).

D. Die Dehnungsmessung an verschiedenen Meßstellen nach Bild 24 längs der x- bzw. y-Koordinaten gab Aufschluß über die Biegewellenausbreitung in diese Richtungen.

7.8 Eigenfrequenz

Eigenfrequenzmessungen wurden durchgeführt, um die Einspannbedingungen der Rippenplatte zu untersuchen und um die in Abschnitt 2.5 im Zusammenhang mit den Biegesteifigkeiten theoretisch bestimmte Eigenfrequenz zu überprüfen. Dazu wurde sowohl das kapazitive Verfahren (Abschnitt 7.5) als auch die DMS-Methode (Abschnitt 7.7) benutzt. Neben dem Einschwingvorgang der Platte wurde eine Reihe von Schwingungen oszillographiert und daraus die Grundeigenfrequenz ermittelt. Nach Bild 28 erhält man Meßwerte von $f_{exp} = 250$ Hz; d.h. $(\omega_{11})_{exp} = 2\pi f_{exp} = 1570\ s^{-1}$. Daß dieser Wert etwas unterhalb der berechneten Grundeigenfrequenz $(\omega_{11})_{theor} = 1658\ s^{-1}$ liegt, ist nicht verwunderlich. Die Randbedingung "fest eingespannt" ist in der Praxis kaum zu verwirklichen, da ein Mitschwingen der Randmassen nicht ausgeschlossen werden kann. Sicherheitshalber wurde die Plattenhalterung mit einem weiteren Stahlrahmen pro Seite versehen, der allerdings keinen meßbaren Einfluß auf die Eigenfrequenz hatte. Um die Eigenfrequenz der Platte oszillographieren zu können, wurde die Zeitbasis des Oszilloskops verzögert getriggert. Dazu wurde der schon bekannten Triggerschaltung (siehe weiter vorn) ein Retarder mit vorwählbarer Verzögerungszeit nachgeschaltet.

Die Auswertung der Eigenfrequenzaufnahmen in Bild 28 hat ergeben, daß die Rippenplatte eine hohe Schwingungsdämpfung besitzt. Ferner sind die Schwingungen nicht völlig linear, da die Amplituden in positiver bzw. negativer z-Koordinatenrichtung leicht unterschiedlich aussehen und die "Halbwellen" verschiedene Dauer haben. Der oben angegebene Wert $f_{exp} = 250$ Hz ist daher als zeitlich gemittelter Wert anzusehen. Schließlich hat sich gezeigt, daß nach dem ersten Zurückschwingen der Platte dem eigentlichen Schwingungsprofil regelmäßig auftretende Störimpulse überlagert sind, die vermutlich auf Wellenreflexionen an den Rippenflanken zurückzuführen sind.

8. Interferenzoptische Erfassung einzelner Durchbiegungsstadien und der Biegewellenausbreitung mittels der Impulsholographie

8.1 Zielsetzung

Bei der Anwendung der holographischen Doppelblitztechnik als einer der modernsten und empfindlichsten optischen Methoden /35/ kam es auf die Beantwortung folgender Fragen an:

A. Inwieweit läßt sich der vereinfachte Ausdruck für die zentrale Durchbiegung im Frühstadium Gl. (59) mit dieser relativ genauen Methode überprüfen?

B. Wie sehen die einzelnen Durchbiegungsprofile der gestoßenen Rippenplatte während verschiedener Deformationsphasen flächenhaft aus? (Bei dem hier verwendeten Verfahren erhält man Interferenzstreifensysteme, die - ähnlich den Höhenschichtlinien in topographischen Karten - Aufschluß über die momentane Plattenwölbung geben. Die Genauigkeit entspricht einer halben Wellenlänge des verwendeten Laserlichts, also hier etwa $3{,}5 \cdot 10^{-7}$ m).

C. Ist das frühe Durchbiegungsverhalten der Platte von der Belastungsrichtung abhängig? (Der zentrale Biegestoß wird sowohl transversal auf die mittlere Rippe als auch auf die ihr gegenüberliegende ebene Seite ausgeübt).

D. Inwiefern unterscheiden sich die Ortsverteilungen der Plattenkrümmungen in der x- und y-Richtung unmittelbar in der Nähe der Stoßstelle bzw. einige Zentimeter davon entfernt? (Vermutlich hat die unter dem Stoßpunkt befindliche Rippe einen gewissen Einfluß auf die örtliche Durchbiegung und Krümmung).

E. Läßt sich holographisch ein gewisser Aufschluß über die Ausbreitung elastischer Biegewellen in einem Körper mit strukturbedingter Anisotropie gewinnen? (In diesem Zusammenhang sind die Geschwindigkeiten der Biegewellen in zwei zueinander orthogonalen Richtungen von Interesse, weil mit deren Verhältnis Rückschlüsse auf die Verhältnisse von Krümmungen und Biegesteifigkeiten ermöglicht werden. Das Verhalten von Bie-

gewellen beim Durchlaufen von Unstetigkeitsstellen, wie z.B. einer Anzahl von Rippen, bedarf längerer theoretischer Betrachtungen).

Zunächst soll hier kurz an die Prinzipien der holographischen Aufnahmetechnik und der Rekonstruktion ursprünglicher Wellenfelder erinnert werden, wobei auf die physikalischen Hintergründe der Funktion der erforderlichen kohärenten Laser-Lichtquelle nur oberflächlich eingegangen werden kann. Ausführlichere Informationen zu diesem Thema entnehme man beispielsweise den Büchern von H. Weber und G. Herziger /36/ oder von D. Röss /37/. Dagegen wird die Funktionsweise der hier benutzten Holokamera eingehender beschrieben und die Steuerung der Laser-Lichtimpulse erläutert. Anschließend wird die Auswertung der Versuchsergebnisse besprochen.

8.2 Allgemeines

Seit der Entwicklung des Lasers als kohärente Lichtquelle fand die Möglichkeit zur räumlichen Darstellung von Gegenständen auf dem Gebiet der optischen Informationsübertragung großes Interesse. Kohärenz bedeutet, daß zwei Wellenzüge die gleiche Frequenz und eine feste Phasenbeziehung zueinander haben. Das ist nur möglich, wenn sie von der selben Lichtquelle ausgesendet werden. Außerdem dürfen sich die Wegstrecken, die zwei Wellenzüge von der Lichtquelle bis zum Beobachtungsort zurücklegen, nicht mehr als um die Länge eines Wellenzuges unterscheiden, um miteinander interferieren zu können. Bei holographischen Aufnahmen werden sowohl Amplituden- als auch Phaseninformationen des kohärent beleuchteten Objekts auf einer Photoplatte gespeichert.

Je nach Art der zu untersuchenden dynamischen Deformationsprobleme (periodische Schwingungen, einmalige Vorgänge usw.) stehen verschiedene holographische Verfahren, wie z.B. Real-Time-Methode, Time-Average-Methode und Doppelbelichtungsmethode zur Verfügung, von denen wegen der hier zu erfassenden schnellablaufenden Deformationsvorgänge die Doppelbelichtungsmethode besonders geeignet

ist. Alle Verfahren beruhen aber gemeinsam auf dem im folgenden Abschnitt wiedergegebenen Prinzip:

8.3 Prinzip der Holographie

Zur Erzeugung eines Hologramms in einer Anordnung nach Bild 29 wird der Laserstrahl zunächst geteilt. Eine der alsdann aufgeweiteten Lichtkomponenten beleuchtet als "Objektstrahl" den zu untersuchenden Gegenstand. Die von der Objektoberfläche kommenden gestreuten Lichtstrahlen werden der zweiten Lichtkomponente, dem "Referenzstrahl", auf einer speziell für die Wellenlänge des verwendeten Lichts sensibilisierten Photoplatte superponiert. Die Objektoberfläche wird zur besseren Streufähigkeit sandgestrahlt oder mattweiß gespritzt, jedoch nicht wie bei einigen optischen Verfahren verspiegelt /38/. Vom Phasenunterschied und von den Amplituden der beiden miteinander interferierenden Teilstrahlen hängt es ab, ob auf der Photoplatte an bestimmten Punkten eine Schwächung oder Verstärkung entsteht, was sich durch verschieden helle Lichtflecke äußert. Umrisse oder Details des Objekts sind auf der Hologrammplatte im Gegensatz zur konventionellen Photographie mittels abbildender Optik im allgemeinen nicht sichtbar. Dennoch bilden die Feinstrukturen der Hologrammplatten-Schwärzung die optischen Speicherdaten, wobei auch jedes Teilstück der Platte eine vollständige Information über das Objekt entnält.

Zum "Lesen" der gespeicherten Informationen wird das entwickelte Hologramm wieder mit einem aufgeweiteten Laserstrahl beleuchtet, dessen Einfallswinkel zur Normalen der Hologrammplatte gleich dem des Referenzstrahls ist. Das Rekonstruktionslicht wird an dem Schwärzungsmuster gebeugt, wodurch ein reelles und ein virtuelles Bild des Objekts entsteht. Durch Bewegen des Kopfes und Änderung des Blickwinkels kann der Beobachter durch die beleuchtete Hologrammplatte wie durch ein Fenster das virtuelle Bild eindrucksvoll unter verschiedenen Perspektiven dreidimensional sehen und bei gewissen Einschränkungen hinsichtlich der begrenzten Tiefen-

schärfe auch photographieren. Diese Zusammenhänge findet man z.B. bei M. Françon /39/ ausführlicher beschrieben.Im Hinblick auf das verfolgte Ziel der optischen Deformationsanalyse von Strukturelementen sind neben der perspektivischen Ansicht des Versuchsobjekts auch die Stadien seiner Verformung interferenzholographisch zu erfassen. In diesem Zusammenhang erlaubt die Doppelimpulsholographie wegen der Kürze der Laserblitze (hier: 25 ns) die Aufnahme besonders schnellablaufender und auch einmaliger Vorgänge.

Bei diesem Verfahren wird zunächst das noch undeformierte Objekt von einem aufgeweiteten Laserblitz ausgeleuchtet, dem ein zweiter Blitz zu einem definierten Zeitpunkt nach dem Verformungsbeginn (t=0) folgt. Durch die zwischenzeitliche Zustandsänderung der Objektoberfläche werden Änderungen in den optischen Weglängen und letztlich optische Phasendifferenzen hervorgerufen. Somit wird die Hologrammplatte doppelt belichtet, wobei durch jede Teilbelichtung die optischen Daten des zugehörigen Objektzustandes gespeichert werden. Bei der Rekonstruktion werden die ursprünglich phasenverschobenen Wellenfelder des Objekts wieder erzeugt und durch deren Überlagerung Interferenzstreifen sichtbar.

8.4 Holographische Kamera

Zur Durchführung der holographischen Versuche wurde eine "Holokamera" zusammengestellt, die sowohl die untersuchte Rippenplatte zweimalig durch einen aufgeweiteten Laserblitz beleuchtet als auch das vom Objekt kommende Streulicht zusammen mit dem Referenzstrahl auf einem Spezialfilm aufnimmt. Der Aufbau der Kamera soll u.a. folgenden Forderungen gerecht sein:

A. Die Bedienung der Kamera (Einstellung der optischen Komponenten, Zünden der Laserimpulse, Filmwechsel usw.) soll mit wenig Personal möglich sein.

B. Die Höhe des zentralen Lichtstrahls (Arbeitshöhe) muß mit der Mitte der vertikal stehenden Versuchsplatte übereinstimmen.

C. Die Kohärenzbedingungen müssen erfüllt werden.

D. Form, Stärke und Wiederholbarkeit der Impulse müssen kontrollierbar sein.

Die Realisierung der Holokamera ist im folgenden beschrieben: Der Impulslaser[7)] und sämtliche optischen Komponenten (Spiegel, Linsen) befinden sich auf einer Tischplatte über einer stabilen Konstruktion aus Stahlprofilen. Die Tischplatte ist mit einer dünnen Stahlplatte abgedeckt, so daß die optischen Komponenten, die ihrerseits an Magnethaltern befestigt sind, genügend Halt auf der Platte haben, aber gegebenenfalls noch verschiebbar sind. Die Plattenoberfläche und die Fassungen der optischen Teile sind mattschwarz gespritzt, um unerwünschte Lichtreflexionen zu vermeiden. Zur weiteren Verbesserung der Sicherheit ist die Holokamera mit einer Haube aus grünem Acrylglas abgedeckt. Da es sich bei dem Grün der Haube und dem Rot des Laserlichts annähernd um Komplimentärfarben handelt, kann kaum Licht austreten. Nur die zur Versuchsplatte gerichtete Seite bleibt offen. Die geometrische Lage der Spiegel und Linsen sowie die Führung der Laserstrahlen sind in Bild 29 festgehalten. Bei der Einstellung der Holokamera ist darauf zu achten, daß die Lichtwege von Objekt- und Referenzstrahl vom Strahlteiler bis zur Hologrammplatte für einen besseren Kontrast bei den Interferenzerscheinungen annähernd gleich sein sollten.

Die hohe Energiedichte von Laserstrahlen größerer Leistung macht die ausschließliche Verwendung dielektrischer Interferenzspiegel zur Strahlablenkung erforderlich, die besonders für die Wellenlänge des verwendeten Laserlichts einen hohen Reflexionsgrad haben. Außerdem wurden zur Strahlaufweitung nur Konkavlinsen verwendet, da Konvexlinsen wegen der Lichtbündelung in ihren Brenn-

---

7) Rubin Doppelimpulslaser

Hersteller:	J.K.Lasers, England
laseraktives Material:	Rubinstab, mit Chromionen dotiert
max. Leistung:	60 MW
Wellenlänge:	694 nm
Impulsdauer:	25 ns
Impulsabstand:	1 - 800 µs

punkten geräuschvolle Plasmabildungen hervorrufen. Bemerkenswert ist auch ein kleiner He-Ne-Laser, der als Justierlaser am rückwärtigen Ende des Impulslasers befestigt ist und mit jenem eine gemeinsame optische Achse hat. Der rückwärtige Resonatorspiegel des Impulslasers ist nur für die Wellenlänge des Impulslasers selbst 100 % reflektierend, für die Wellenlänge des Justierlasers dagegen durchlässig. Mit dieser Anordnung lassen sich die optischen Konponenten exakt einstellen. Es handelt sich hierbei um fünf Planspiegel verschiedenen Durchmessers, einen Halbspiegel zur Strahlaufweitung, zwei Aufweitungsoptiken für Objekt- und Referenzstrahl sowie einen Hologrammhalter, der parallel zur Versuchsplatte und konzentrisch dazu ausgerichtet sein sollte. Als Filmmaterial werden Photoplatten vom Format 9 cm x 13 cm (Agfa Holotest 10 E 75) verwendet, die in Kassetten mit Schiebedeckel eingelegt werden.

Die Steuergeräte zum Betrieb des Lasers sind unterhalb der Arbeitsplatte auf einem Zwischenboden gut zugänglich untergebracht. Dazu gehören zwei Temperatur-Regelkreise zum Konstanthalten der Resonatorspiegeltemperatur, zwei vorwählbare Zeitverzögerungsgeräte, Bedienungselemente für die benötigten Hochspannungen an den Pumplampen und an dem elektrooptischen Verschluß sowie Kontrollinstrumente. Die Funktionsbeschreibung folgt im Abschnitt "Steuerung der Laserimpulse". Der Steuerschrank für die Hochspannungsversorgung (Kondensatoren, Relais, Hochspannungsschalter usw.) befindet sich unmittelbar neben der Holokamera und ist zur besseren Beweglichkeit auf Rollen gelagert. Er beinhaltet ferner ein Kühlsystem (Wärmetauscher im Gegenstromprinzip) zur Kühlung der optischen Pumpkammer. Das für den Primärkreis benötigte Leitungswasser wird in einem Filter gereinigt; im Sekundärkreislauf wird zur Verhinderung der Bildung von Mikroorganismen destilliertes Wasser verwendet.

Schließlich sei besonders darauf hingewiesen, daß als Versuchsraum für alle Experimente ein Faradayscher Käfig zur Verfügung stand, in dem die unerwünschte Auslösung der Laserblitze (Triggerung aufgrund von elektrischen Störfeldern) vermieden werden konnte.

8.5 Steuerung der Laserimpulse

Zur Auslösung der für jede Doppelbelichtung benötigten Laserblitze in der gewünschten zeitlichen Reihenfolge und zur Erreichung möglichst gleich großer Energien der Laseremissionen wurde eine elektrische Steuerung nach Bild 31 benutzt. Mit einer Zeitvorgabe von 1,3 ms vor dem Aufschlag der Kugel auf die Rippenplatte wird das Pumplicht des Lasers gezündet, das von zwei zusammen mit dem Rubin-Laserstab in einer wassergekühlten Kammer untergebrachten Quarzlampen erzeugt wird und durch Energieeinstrahlung die Chromionen im Rubin in den angeregten Zustand versetzt. Die Zündung erfolgt dadurch, daß die Stoßkugel während ihrer Bewegung in einer bestimmten Entfernung von der Platte eine Lichtschranke unterbricht. Diese besteht aus dem Strahl eines kontinuierlichen He-Ne-Lasers und einer Photodiode. Der Strahl fällt schräg auf die Rippenplatte und wird in der Nähe der Stoßstelle mehr oder weniger reflektiert. Das photoelektrische Signal wird dann einem "Schmitt-Trigger" zugeführt, an dessen Ausgang je nach vorgewähltem Schwellwert ein Schaltimpuls erzeugt wird. Dadurch wird sowohl das Pumplicht gezündet als auch der Retarder I in Bild 31 angesteuert, der mit einer Verzögerungszeit von 1,2 ms die Auslösung des ersten Laserblitzes bewirkt. Somit ist die Objektausleuchtung noch vor dem Stoßbeginn sichergestellt.

Zur Auslösung eines steuerbaren Laserblitzes großer Leistung befindet sich zwischen einer Endfläche des Laser-Stabes und dem hinteren Resonatorspiegel ein elektrooptischer Verschluß, mit dessen Hilfe die Laserwirkung nach dem Einschalten des Pumplichts eine gewisse Zeit verzögert werden kann, bis sich eine genügend große Zahl von Chrom-Ionen im angeregten Zustand befindet /36,37/. Beim Öffnen des Verschlusses wird dann ein sehr kurzer intensitätsstarker Laserimpuls abgestrahlt. Die Realisierung des Verschlusses nach dem sogenannten "Q-Switch-Prinzip" erfolgt durch eine Pockelszelle mit einem elektrisch angesteuerten doppelbrechenden KD*P-Kristall[8] in Zusammenwirkung mit einem Polarisator und dem hinteren undurchlässigen Resonatorspiegel. Die Doppel-

8) Kaliumdihydrogenphosphat

brechungseigenschaften des Kristalls werden durch elektrische Felder beeinflußt. Das zunächst willkürlich schwingende Licht wird im Polarisator linear polarisiert und im KD*P-Kristall, dessen Hauptrichtungen je 45° zur Polarisationsrichtung stehen, in zwei zueinander senkrecht schwingende, gleich große Komponenten aufgespalten. Im einfachen Durchlauf durch den Kristall haben die Komponenten einen Gangunterschied von einem Viertel ihrer Wellenlänge ($\lambda/4$); das Licht ist dann unter diesen Bedingungen zirkular polarisiert. Nach der Reflexion am Resonatorspiegel wird das Licht im zweiten Durchlauf der Pockelszelle (d.h. im Rücklauf) wegen des Gangunterschiedes von nunmehr $\lambda/2$ wieder linear polarisiert; und zwar senkrecht zu seiner vorherigen Polarisationsrichtung, so daß es jetzt am Polarisator gesperrt wird. Der Durchgang zum Rubinstab und eine weitere Lichtverstärkung ist daher nicht möglich. Zum Öffnen des elektrooptischen Verschlusses wird die Pokkelszellenspannung z.B. durch einen Thyristor kurzgeschlossen. Dann verliert der Kristall in dieser axialen Richtung seine Doppelbrechung; das linear polarisierte Licht passiert ungehindert die Pockelszelle und wird am rückseitigen Resonatorspiegel reflektiert. Wegen seines jetzt unveränderten Polarisationszustandes kann das Licht durch den Polarisator treten, wodurch der Laservorgang im Resonator ausgelöst und durch induzierte Emission ein Laserblitz erzeugt wird. Der Aufbau des Rubin-Lasers ist in Bild 30 skizziert.

Mit dem Start des ersten Retarders läuft auch ein digitaler Zeitzähler an, mit dem zur Kontrolle die restliche Flugzeit der Stoßkugel bis zum Aufprall gemessen wird. Sobald die Kugel die geerdete Platte berührt, wird durch Kurzschluß am Spannungsteiler über eine monostabile Kippstufe ein Signal erzeugt, das den Retarder II triggert und den Zeitzähler stoppt. Nach Ablauf der Verzögerungszeit, die bei den hier durchgeführten Versuchen zwischen 10 µs und 300 µs gewählt wurde, erfolgt die Auslösung des zweiten Laserblitzes. Auf diese Weise erhält man für verschiedene Zeitverzögerungen durch Wiederholung der Stoßversuche eine Sequenz von Momentaufnahmen der verschiedenen Plattenzustände. Die frühzeitige Plattenverformung läßt sich dadurch in ihren

zeitlichen Phasen erfassen.

8.6 Auswertung der holographischen Aufnahmen

Betrachtet man eine doppelt belichtete und entwickelte Hologrammplatte im aufgeweiteten Lichtbündel eines kontinuierlichen Rekonstruktionslasers, kann man das mit einem System von Interferenzstreifen überzogene Versuchsobjekt als virtuelles Bild beobachten. Die Interferenzstreifen verbinden hierbei angenähert die Orte gleicher Durchbiegung, so daß man schließlich für die einzelnen Zeitmomente die Durchbiegungsflächen erhalten kann. Zunächst einmal ist es zweckmäßig, die beobachteten Bilder photographisch festzuhalten. Je nach verwendeter Objektivbrennweite läßt sich entweder das gesamte Objekt auf den Film bringen oder zur besseren Auflösung der dicht nebeneinanderliegenden Interferenzstreifen ein vergrößerter Ausschnitt photographieren. Als Negativmaterial wurde wegen der hohen Auflösung Ilford PAN F (18 DIN) verwendet. Für Bild 32 wurde mit einer Kleinbildspiegelreflexkamera mit einer Brennweite von f=0,05 m gearbeitet; für Bild 33 wurde ein Teleobjektiv mit f=0,1 m verwendet. Hohe Auflösungen konnten auch mit einer großformatigen Linhof-Technika erreicht werden. Bei der photographischen Aufnahme des virtuellen Bildes wurde folgendes Phänomen beobachtet: Während man bei visueller Beobachtung alle Interferenzstreifen gleichzeitig scharf zu sehen glaubt, weil das Auge die Objektpunkte abtastet und dabei ständig die Brennweite der Linse verändern kann, lassen sich wegen der begrenzten Tiefenschärfe einer Kamera nur gewisse Bereiche gleichzeitig scharf abbilden. Bei der hier verwendeten Holokamera ließen sich entweder bevorzugt horizontal oder vertikal verlaufende Interferenzstreifen abbilden, wie Bild 34 veranschaulicht. Die Auswertung dieser Aufnahmen findet man in Bild 35.

Die Orte dieser "Linien höchsten Kontrastes" brauchen nicht auf der Oberfläche des Versuchsobjektes lokalisiert zu sein, sondern können gegebenenfalls beträchtlich davor oder dahinter liegen. Die Lage der Streifen hängt von den Beobachtungsbedingungen und von der Art der Objektbewegung ab, je nachdem ob ein Oberflächenelement der Versuchsplatte eine Translation, Rotation, Dehnung

oder Veränderung aus mehreren Bewegungsarten erfährt. Das Problem der Lokalisation wird ausführlicher z.B. von Viénot /40/ oder W. Schumann und M. Dubas /41/ behandelt.
Das Auswerteverfahren besteht nun darin, daß die einzelnen Streifen in ihrer geometrischen Lage unter dem Mikroskop ausgemessen werden, wobei die Interferenzstreifen verschiedener Ordnung N angenähert Orte gleicher Plattendurchbiegung W_N darstellen. Die Linien werden vom Plattenrand aus gezählt, wo $W_N = 0$ ist.
Vorher lassen sich aus der Entwicklung der Durchbiegungsphasen die jeweiligen Vorzeichen und Nulldurchgänge der Durchbiegungsverläufe feststellen. Im Falle konstanter Wellenlänge λ bei Aufnahme und Rekonstruktion gilt:

$$W_N = \frac{\lambda (2N - 1)}{2(\cos\alpha_E + \cos\alpha_B)} \quad , \tag{104}$$

wobei N = 1,2,3... die Ordnungen der dunklen Interferenzstreifen bedeuten und α_E der Einfallswinkel des Objektstrahls zur Plattennormalen und α_B der zur Plattennormalen orientierte Beobachtungswinkel darstellen. Hält man diese Richtungswinkel sehr klein, vereinfacht sich Gl. (104) zu

$$W_N = \frac{\lambda(2N - 1)}{4} \quad . \tag{105}$$

Durch die Wahl eines genügend großen Abstandes der Holokamera von der Rippenplatte wurde diese Voraussetzung in der Praxis weitgehend erfüllt.

Nun ist noch zu berücksichtigen, daß zur Rekonstruktion nicht derselbe Laserstrahl wie bei der Aufnahme verwendet werden konnte. Zur bequemen visuellen Beobachtung und zur Photographie des virtuellen Bildes wurden die Hologramme mit dem Licht eines aufgeweiteten kontinuierlichen Laserstrahls beleuchtet. Die Wellenlänge dieses He-Ne-Lasers (Spectra-Physics, 15 mW) beträgt $\lambda' = 632{,}8$ nm.

Aus den holographischen Abbildungsgesetzen, die man beispielsweise bei M. Françon /39/ findet, läßt sich ableiten, daß die

Verschiebung des Objektpunktes in Richtung der z-Achse für unterschiedliche Wellenlängen bei der Aufnahme (λ) und der Rekonstruktion (λ')

$$W_N = \frac{(\lambda')^2 [2N - 1]}{4\lambda} \tag{106}$$

beträgt.

Dieser Ausdruck wurde zur Bestimmung der Durchbiegungsprofile in x- und in y-Richtung benutzt. Aus der Entwicklung einzelner Durchbiegungsstadien mit Hilfe einer Serie von Momentaufnahmen lassen sich auch die Vorzeichen der örtlichen Durchbiegung erkennen. Bild 32 zeigt die Interferenzmuster der Rippenplatte für verschiedene Zeitpunkte nach Stoßbeginn und Bild 33 dazu die vergrößerten Zentralbereiche.
Wie zu erwarten, ist die Ausdehnung der ovalen Figuren in vertikaler Richtung größer als in horizontaler Richtung. Das hängt mit den richtungsabhängigen Biegesteifigkeiten und den damit verbundenen Ausbreitungsgeschwindigkeiten der elastischen Biegewellen zusammen, worauf noch näher eingegangen wird. Eine Besonderheit fällt allerdings unterhalb des Stoßpunktes auf: dort verlaufen die längeren Achsen horizontal. Dies bedarf noch einer Klärung.

Die holographischen Versuche wurden mit einer Stoßmasse m_{S2} = 0,588 kg bei einer Stoßgeschwindigkeit von v_o = 0,375 m/s durchgeführt. Größere mechanische Impulse waren bei der gegebenen Rippenplatte aus holographischer Sicht ungeeignet, weil die Ordnung der Interferenzstreifen zu groß geworden und diese selbst bei Verwendung hochwertiger Optik nicht mehr auflösbar gewesen wären. Es sei daran erinnert, daß bereits durch Zunahme der Durchbiegung um eine halbe Lichtwellenlänge ($\Delta W = 347 \cdot 10^{-9}$ m) die Anzahl der Interferenzstreifen um eine Ordnung erhöht wird. In umfangreichen Versuchen wurden Durchbiegungsstadien zwischen 10 µs und 300 µs Zeitdifferenz zum Stoßbeginn festgehalten. Im Sinne der hier untersuchten Stoßtheorie im Frühstadium war nur die Zeit bis etwa 150 µs nach Stoßbeginn von Bedeutung. Aufnahmen von weiter fortgeschrittenen Verformungszuständen waren eher von optischem Reiz.

Innerhalb des Frühstadiums lassen sich dagegen Aussagen der vereinfachten Stoßtheorie überprüfen. Bild 36 zeigt die örtliche Verteilung der Plattendurchbiegung zu verschiedenen Zeiten, in Bild 8 ist der zeitliche Verlauf der zentralen Durchbiegung nach Gl. (59) den diskreten Durchbiegungswerten aus den holographischen Momentaufnahmen gegenübergestellt und Bild 37 veranschaulicht die Zuordnung zwischen der Interferenzstreifenlage und der Plattengeometrie.

Zur Abschätzung der Geschwindigkeit der schnellsten elastischen Biegewellen bestimmt man auf einer Momentaufnahme (z.B. Bild 32, t = 100 µs) die Abstände in x- und y-Richtung zwischen dem Stoßpunkt und den davon entferntesten, eben noch sichtbaren Interferenzstreifen, wobei das Maßstabsverhältnis zur Rippenplatte berücksichtigt werden muß. Man erhält hier mit $c_x = s_x/t$ und $c_y = s_y/t$ maximale Werte von $c_x \approx 1925$ m/s und $c_y \approx 2540$ m/s für kleine Wellenlängen. Diese Geschwindigkeiten liegen unter den theoretisch zu erwartenden Werten, da Biegewellen mit kleiner Wellenlänge ohnehin kaum Verformungsenergie transportieren und somit auf den holographischen Aufnahmen die Wellenfronten nicht erkennbar sind. Vergleichsweise wäre die Phasengeschwindigkeit der schnellsten Biegewellen in einer isotropen Platte mit den weiter vorn aufgeführten Materialwerten $c_{Ph} \approx 0{,}93(G/\rho_p)^{0,5} = 2923$ m/s höher als jene aus den optischen Aufnahmen

Interessant ist allerdings, daß das Verhältnis $c_y/c_x = 1{,}32$ über eine gewisse Zeit und für verschiedene "Höhenschichtlinien" nahezu konstant ist. Es stellt sich daher die Frage, ob dieses Verhältnis mit demjenigen der elastischen Plattenkonstanten zusammenhängt. Man weiß, daß beispielsweise bei orthotropen Platten mit konstanter Dicke und ungleichen Elastizitätsmoduli die Beziehung

$$c_y/c_x = (E_y/E_x)^{0,5} \tag{107}$$

besteht /45/. Bei der untersuchten Rippenplatte ist $E_x = E_y = \text{const.}$, so daß Gl. (107) hier ausscheidet. Dagegen ist hier die Platten-

dicke variabel (konstruktive Orthotropie) und dürfte das Verhältnis c_y/c_x beeinflussen. Nimmt man längs der y-Richtung eine konstante Dicke von 8 mm und längs der x-Richtung eine mittlere Dikke von 6 mm an, so ergäbe sich $h_y/h_x = 1{,}33$. Wieweit dieses Verhältnis mit jenem der ermittelten Phasengeschwindigkeiten in Zusammenhang gebracht werden kann, ist noch fraglich, und man wird diesen Sachverhalt noch weiter untersuchen müssen. (Theoretische Abhandlungen zur Ausbreitung elastischer Wellen in anisotropen Körpern findet man z.B. von J.L. Synge /42/, V.T. Buchwald /43/ oder J.D. Achenbach /44/).

Möchte man auf optischem Wege neben der Plattendurchbiegung W auch die Durchbiegungsgradienten (Steigungen) $\partial W/\partial x$ bzw. $\partial W/\partial y$ haben, so überlagert man zwei gleiche holographische Interferenzmuster bei gleichzeitiger geringfügiger gegenseitiger Verschiebung in x- bzw. y-Richtung ("Shift"-Methode /35/). Oder man bedient sich des Moiré-Verfahrens /38/, das unmittelbar zur Gradientendarstellung führt.

9. Spannungsoptische Untersuchungen an einem Schnittmodell

Im Zusammenhang mit der Frage, wieweit das dynamische Verhalten der Rippenplatte davon abhängt, ob die Kugel auf eine Rippe oder auf die gegenüberliegende ebene Seite bei sonst gleichen Bedingungen stößt, wurde während der Eigenfrequenzaufzeichnungen mit Hilfe der kapazitiven Methode (Siehe Kap.7) bemerkt, daß die Schwingungsamplituden in positiver und negativer z-Richtung leicht unterschiedlich aussahen, wie Bild 28 verdeutlicht. Diese Beobachtung war Anlaß zu einer spannungsoptischen Versuchsreihe, in der ein Modell aus Epoxydharz unter Last im Dunkelfeldlinearpolariskop untersucht wurde. Dabei lag die Vorstellung zugrunde, daß aus der Rippenplatte eine Scheibe in der z - x - Ebene herausgeschnitten sein sollte. Statt einer Kugel wurden Stahlkreisscheiben zur Lastaufbringung verwendet. Im Falle eines unterschiedlichen Spannungszustandes je nach Wirkungsrichtung der

Last könnten einige Rückschlüsse auf das reale Plattenproblem gezogen werden.
Nun ist das Gebiet der Spannungsoptik viel zu umfangreich, als daß es im Rahmen dieser Arbeit ausführlich behandelt werden könnte. Eine umfassende Darstellung findet man beispielsweise bei H. Wolf /46/. Hier sollen lediglich die Prinzipien herausgestellt werden, soweit sie zum Verständnis der vorliegenden Versuche dienen.

Der spannungsoptische Effekt ist in der Spannungsdoppelbrechung begründet, die an belasteten Modellen aus Kunststoff sichtbar gemacht werden kann. Bei ebenen Modellen gibt der spannungsoptische Effekt bei senkrechter Inzidenz Auskunft über die Verteilung der maximalen Schubspannung und der Hauptspannungsrichtungen.
Kunststoffe und Gläser, die optisch isotrop sind, gehen unter mechanischer Belastung in einen optisch anisotropen Zustand über. Diese Anisotropie wird also durch die erzeugten Deformationen hervorgerufen.
Geht eine Lichtwelle aus einem optisch isotropen Körper in einen optisch anisotropen Körper über, wird die Welle in zwei Teilwellen gespalten, deren Schwingungsebenen senkrecht aufeinander stehen und deren Phasengeschwindigkeiten verschieden sind. Daher besteht zwischen den beiden Lichtkomponenten nach Austritt aus dem Medium ein optischer Gangunterschied. Dieser Effekt läßt sich mit Hilfe von linear oder zirkular polarisiertem Licht sichtbar machen. Hier wird nun das Modell in einem Linearpolariskop untersucht, wie es in Bild 38 wiedergegeben ist. Das der Lichtquelle zugewandte Polarisationsfilter nennt man Polarisator, das dem Photoapparat zugewandte meist zum ersteren gekreuzte Filter heißt Analysator. Befindet sich zwischen den gekreuzten Filtern kein doppelbrechendes Medium oder ist das Modell unbelastet, liegt ein dunkles Arbeitsfeld vor. Erst bei Verformung des ebenen Modells treten bei senkrechter Inzidenz monochromatischen Lichtes zwei Arten von Streifensystemen auf, von denen die "Isochromaten" Orte konstanter maximaler Schubspannungen und die "Isoklinen" Orte gleicher Hauptspannungsrichtungen verbinden. Die Unterscheidung der beiden schwarzen Streifensysteme kann durch gemeinsames Dre-

hen der Polarisationsfilter erfolgen, da sich hierbei nur die Isoklinen bewegen. Besonders eindrucksvoll sind die Isochromaten mit ihren unterschiedlichen Farben bei Verwendung weißen Lichtes, auf deren Darstellung hier aus drucktechnischen Gründen verzichtet werden muß.

In Bild 38 ist der spannungsoptische Versuchsaufbau skizziert. Eine monochromatische Lichtquelle (Natriumdampflampen, λ_{Na}=589 nm) beleuchtet das Rippenbalkenmodell aus Epoxydharz, nachdem das Licht linear polarisiert ist. Durch den Analysator werden die Isoklinen und Isochromaten photographiert, die durch Verdrehung voneinander zu unterscheiden sind. Für die Aufnahmen wurde eine Spiegelreflexkamera mit 135 mm Objektivbrennweite verwendet. Die Entfernung der Kamera vom Modell betrug 2,8 m. Das Modell war 408 mm lang, 24 mm hoch und 10 mm dick, mit einer Rippen- bzw. Nutbreite von 36 mm und einer Nuttiefe von 12 mm. Das Rohmaterial war ohne Last frei von Störungen. Als Gewichte wurden Stahlscheiben verschiedenen Durchmessers verwendet, die durch Umkehr des Balkens sowohl auf die zentrale Rippe als auch auf die gegenüberliegende gerade Seite wirkten. Das Verhältnis der Scheibendurchmesser entsprach dem der Kugeln beim Plattenstoß. Insgesamt waren alle Maßverhältnisse geometrisch ähnlich im Maßstab 3:1.

Einige Beispiele der spannungsoptischen Aufnahmen sind in Bild 39 zusammengestellt. Bei a) und c) handelt es sich um Aufnahmen, bei denen die Polarisationsrichtungen vertikal bzw. horizontal zur Balkenachse orientiert waren, bei b) und d) war das Polarisationskreuz um 45° gedreht. Wie man sieht, verändert sich dann nur die Lage der Isoklinen. Für die Aufnahmen a) und b) wurde die statische Kraft vertikal in die mittlere Rippe eingeleitet. Dagegen entstanden die Aufnahmen c) und d) während einer vertikalen Belastung auf die Mitte der geraden Balkenseite.
Aus den Aufnahmen in Bild 39 ist nun folgendes zu erkennen:
Beim Druck auf die Rippe a),b) erfolgt eine "weichere" Ausbreitung des Spannungsfeldes nach außen hin als beim Druck auf die gerade Seite. Das mittlere Balkenelement wirkt gewissermaßen als Stempel, wodurch die Wirkung der konzentrierten Einzellast etwas

aufgefächert wird. Man sieht das an der Lage der Isochromatenspitzen, die bei Aufnahme b) gegenüber d) weiter nach außen ragen. Auch liegen jeweils bei a) und b) gegenüber c) und d) mehr Isochromaten in der Nähe des der Druckstelle gegenüberliegenden Randes. Dagegen scheint sich in den Fällen c) und d) die Spannung mehr auf die Druckstelle zu konzentrieren. Weiter fällt auf, daß in Aufnahme a) gegenüber c) die Isoklinen in den Rippenecken auftreten. Verbindet man diese Beobachtungen, so liegt der Schluß nahe, daß bei sonst gleicher Last beim Druck auf die mittlere Rippe die Verformungsenergie im "Rippenbalken" mehr nach außen verteilt ist als beim Druck auf die Mitte der geraden Seite, wo die Verformungsenergie mehr nahe der Druckstelle lokalisiert ist. Möglicherweise ist damit das beobachtete nichtlineare Schwingungsverhalten der Rippenplatte aus dem unterschiedlichen Wechselspiel bei der Energieumwandlung zu erklären.

10. Besprechung der Ergebnisse und Schlußbetrachtung

10.1 Allgemeines

In der vorliegenden Arbeit wird das dynamische Verhalten transversal gestoßener Platten mit konstruktiv bedingter Orthotropie untersucht. Diese Ausführungen sind im Zusammenhang mit der systematischen Verformungsanalyse schlagartig belasteter Bauteile zu sehen, wobei orthotrope Platten unter diesen Belastungsbedingungen bisher wenig behandelt wurden, obwohl orthotrope Platten und speziell Rippenplatten in ihrer technischen Anwendung (Flugzeugbau, Schiffsbau, Architektur) häufig zu finden sind. Die Arbeit wird vorwiegend unter dem Aspekt des mechanischen Verhaltens der Stoßpartner durchgeführt und ist somit der Grundlagenforschung über schlagartig belastete Platten zuzuordnen, wobei die sich ergebenden maximalen Stoßbelastungen von besonderem Interesse sind.

Durch die beachtlichen Stoßkräfte, die beim Aufprall der Stoß-

massen wegen ihrer starken Bremsverzögerung entstehen, treten in der Rippenplatte kurzzeitig große örtliche Biegemomente auf, die während des frühen Kontaktgeschehens ihr Maximum haben und in dem als "Frühstadium" bezeichneten Zeitraum die Gefahr z.B. einer Rißbildung begünstigen. Ein Ziel dieser Arbeit ist daher die sowohl theoretische als auch experimentelle Ermittlung wichtiger Belastungsgrößen, wie z.B. Stoßkraft, zentrale Plattendurchbiegung und Axialdehnung innerhalb des Frühstadiums, das bei entsprechender Plattengröße von den Randbedingungen unabhängig ist und sich bei gegebenen physikalischen Eigenschaften und geometrischen Abmessungen leicht abschätzen läßt. Darüberhinaus ist das Verhalten der Stoßpartner in einem späteren Stadium der Kontaktwechselwirkung unter Berücksichtigung des Einflusses von Stoßmasse, Kugelradius und Stoßgeschwindigkeit von Interesse.

10.2 Plattendurchbiegung

Zunächst wird eine Differentialgleichung angegeben, die das Schwingungsverhalten orthotroper Platten charakterisiert. Die Lösung für die Plattendurchbiegung bei einer Stoßkrafteinwirkung mit beliebigem zeitlichen Verlauf wird benutzt und im Sinne einer bequemen praktischen Handhabung in vereinfachter Form dargestellt. Als Ergebnis erhält man - wie auch im isotropen Fall - theoretisch einen proportionalen Zusammenhang zwischen zentraler Plattendurchbiegung und der Impulsänderung der Stoßmasse während der frühen Kontaktwechselwirkung. Die Art der Randbedingungen und damit auch der Einfluß der Eigenfrequenzen der Platte spielen hierbei keine Rolle. Allerdings sollte man im Auge behalten, daß die Plattendurchbiegung in dieser Darstellung allein den Biegemomenten zuzuordnen ist und die anderen Einflüsse (Rotationsträgheit, Schubverformung) gerade bei Versteifungsrippen beachtlich sein können. Daher ist von vorn herein ein Unterschied zwischen theoretischer Proportionalitätskonstante (hier als Plattenparameter bezeichnet) und experimentell bestimmbarer Konstante zu erwarten.

10.3 Biegesteifigkeiten

Eine gewisse Problematik stellen die den orthotropen Platten eigenen richtungsabhängigen Biegesteifigkeiten dar, deren Berechnung im Falle konstruktiv bedingter Anisotropie nur unter Berücksichtigung der Plattengeometrie möglich ist. Wegen ihrer mangelnden exakten Berechenbarkeit wurden hier die Biegesteifigkeiten auf unterschiedliche Weise abgeschätzt und letztlich diejenigen Werte weiterbenutzt, deren Verwendung beim Vergleich der theoretischen mit der gemessenen Platten-Eigenfrequenz zur besten Übereinstimmung führte.

10.4 Stoßkraft

Mit der vereinfachten Durchbiegungsbeziehung, dem Hertzschen Kontaktkraftgesetz und dem Newtonschen Grundgesetz konnte man nun in Anlehnung an die Behandlung isotroper Platten eine nichtlineare Differentialgleichung für die Stoßkraft herleiten und die zeitlichen Verläufe der Stoßkraft theoretisch ermitteln, wobei zu beachten ist, daß die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit des Hertzschen Kontaktkraftgesetzes beim Stoß auf eine schmale Rippe besonders bei höheren Stoßgeschwindigkeiten und damit größeren Kontaktradien nur noch eingeschränkt erfüllt sind.

10.5 Krümmungen

Zur Berechnung der Biegedehnungen in x- bzw. in y-Richtung wurde die Durchbiegungsfunktion zunächst jeweils zweimal partiell nach x bzw. y differenziert. Die so erhaltenen Krümmungen wurden ebenfalls in vereinfachter Form dargestellt und ließen sich dann nach einer Zerlegung der Stoßkraft in Rechteckimpulse besonders leicht ermitteln. Allerdings läßt sich daraus eine Verbindung zu den Biegedehnungen nur für isotrope Platten und orthotrope Platten mit konstanter Dicke ableiten.

10.6 Versuche

Nach der Auswahl einer geeigneten Rippenplatte (Aluminiumlegierung) hinsichtlich ihrer geometrischen Abmessungen und Festigkeitseigenschaften wurden umfangreiche Stoßversuche durchgeführt, um einerseits die Aussagen der vereinfachten Stoßtheorie orthotroper Platten zu überprüfen und andererseits grundsätzlichen Aufschluß über das Kontaktverhalten beim Stoß auf eine Rippenplatte zu erhalten. Dabei wurden die zeitlichen Verläufe der Stoßkraft, die Plattendurchbiegung unter dem Stoßpunkt, die Dehnungen längs verschiedener Koordinatenrichtungen und die Grundeigenfrequenz untersucht. Es wurde mit Stahlkugeln sowohl transversal auf die zentrale Rippe als auch im umgekehrten Richtungssinn auf die ebene Plattenseite gestoßen, wobei die Stoßmassen (Kugelradien) und die Aufschlaggeschwindigkeiten variiert wurden. Im einzelnen wurden folgende Ergebnisse erzielt:

Für die Stoßkraft ergaben sich keine nennenswerten Unterschiede zwischen dem Stoß auf die Rippenseite und auf die ebene Seite bei sonst gleichen Bedingungen (Masse, Geschwindigkeit). Die maximale Stoßkraft wächst leicht überproportional mit der Stoßgeschwindigkeit, was auch bei dünnen isotropen Platten beobachtet wurde. Jede Kugel erzeugt einen für sie charakteristischen Stoßkraftverlauf und eine entsprechende Kontaktwechselwirkung (Mehrfachkontakte). Kleine Kugeln berühren die Platte während eines Stoßversuchs häufiger als größere Kugeln; kleine Kugeln führen zu mehreren kurzen Stoßkraftsignalen. Bei größeren Kugeln fällt der Stoßkraftverlauf langsamer ab, durchläuft aber nochmals ein Maximum von etwa dergleichen Größe des ersten. Interessant ist die Beobachtung, daß die maximalen Stoßkräfte bei allen verwendeten Kugeln trotz ziemlich unterschiedlicher Massen in der gleichen Größenordnung liegen. Dabei ist noch nicht hinreichend geklärt, ob das charakteristische Kontaktverhalten allein den unterschiedlichen Massen oder auch den unterschiedlichen Kugelradien zuzuschreiben ist. Gegenüber den theoretisch abgeschätzten maximalen Stoßkräften treten besonders bei größeren Stoßgeschwindigkeiten Unterschiede auf. Im allgemeinen sind dann die

Meßwerte größer als theoretisch zu erwarten. Es ist anzunehmen, daß das Hertzsche Kontaktkraftgesetz hier nicht geeignet ist, da die Bedingungen für seine Anwendbarkeit (z.B. kleine Kontaktfläche im Vergleich zu den übrigen Körperabmessungen) nicht eingehalten werden. Für den Stoß auf eine Rippe sollte daher ein anderes Kontaktkraftgesetz mit speziellen Parametern entwickelt werden. Beim Stoß kleiner Kugeln auf die ebene Plattenseite erhält man dagegen eine gute Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung, wie Bild 13 zeigt. Vermutlich sind hier die Bedingungen der Hertzschen Theorie besser erfüllt.

Die Messungen der zentralen Plattendurchbiegung führten im Frühstadium zu Werten, die annähernd den vorn abgeleiteten vereinfachten Ausdruck für die Durchbiegung unter dem Stoßpunkt bestätigten. Der spätere Durchbiegungsverlauf stand wieder mit dem unterschiedlichen Kontaktverhalten in Zusammenhang: Erwartungsgemäß führten größere Massen auch zu größeren Plattendurchbiegungen. Beim Stoß einer großen Masse hat die Platte noch eine beachtliche Durchbiegung in positiver Richtung, wenn der Kontakt bereits beendet ist und die Kugel in umgekehrter Richtung wieder von der Platte abgehoben hat. Dagegen hat sich bei kleinen Stoßmassen nach Beendigung der Kontakte die Platte bereits vollständig zurückbewegt und beginnt in den eingeschwungen Zustand überzugehen.

Bei der Dehnungsmessung mittels Dehnungsmeßstreifen wäre eigentlich die Auskunft über denjenigen Anteil der Biegedehnung erwünscht gewesen, der unmittelbar den Biegemomenten zuzuordnen ist. Tatsächlich aber wurden die Axialdehnungen als Überlagerung der oben aufgeführten Dehnungen mit Längs- und Biegedehnungen aus Nahfeldeinflüssen durch Einzellast gemessen, und eine Separation der Komponenten ist nicht möglich. Außerdem bewirkt der Einfluß der einseitig angeordneten Versteifungsrippen (Balkenelemente) besonders unter dem Stoßpunkt lokal ein anderes Dehnungsverhalten, als bei einer orthotropen Platte mit konstanter Dicke zu erwarten gewesen wäre. Wahrscheinlich bleiben die theoretisch vereinfachten Ausdrücke für die Krümmungen auf diese

Platten beschränkt. Das Verhältnis der gemessenen zentralen Dehnungen in y-Richtung zu denen in x-Richtung betrug für alle Stoßkombinationen etwa 2,5 und steht damit im Widerspruch zu den Erwartungen. Man wird daher die unmittelbare Umgebung des Stoßortes bei dieser Art von Strukturelementen, insbesondere den "Balkeneinfluß" am Stoßort weiter untersuchen müssen. (Siehe hierzu auch die holographischen und spannungsoptischen Aufnahmen).
Als weiteres Ergebnis der Dehnungsmessungen wurde beobachtet, daß beim Stoß auf die ebene Seite die gegenüberliegende Rippenoberfläche größere Dehnungen erfuhr als umgekehrt. (Die Stoßkräfte und Plattendurchbiegungen waren von der Belastungsrichtung unabhängig). Außerdem wurde durch die Dehnungsmessung an verschiedenen Meßstellen längs der x- bzw. y-Koordinaten jeweils für einen bestimmten Zeitpunkt eine unterschiedliche, richtungsabhängige Ausbreitungsgeschwindigkeit der elastischen Biegewellen beobachtet. Hierzu wurde das Geschwindigkeitsverhältnis 1,32 aus den holographischen Aufnahmen bestätigt; allerdings lagen die absoluten Geschwindigkeiten deutlich unter den holographisch ermittelten Werten, da die schnelleren energieärmeren Biegewellen hier wegen der geringeren Empfindlichkeit der Methode nicht erfaßt werden konnten.

Einige spannungsoptische Versuche wurden an einem Rippenbalkenmodell aus Epoxydharz durchgeführt, da bei Eigenfrequenzmessungen an der Rippenplatte ein nichtlineares Schwingungsverhalten beobachtet wurde, wobei die Schwingungsamplituden in Richtung der Rippenseite etwas größer waren als beim Zurückschwingen. Der Rippenbalken wurde mit einer statischen Einzelkraft transversal sowohl auf der mittleren Rippe als auch auf der gegenüberliegenden geraden Seite belastet. Mit einem Linearpolariskop wurden die Interferenzerscheinungen unter Last bei verschiedenen Stellungen des Polarisationskreuzes beobachtet. Aus den photographischen Isoklinen- und Isochromatenaufnahmen ist nun wegen der unterschiedlichen örtlichen Streifenverteilung zu erkennen, daß beim Druck auf die mittlere Rippe wegen ihrer "Stempelwirkung" die Verformungsenergie mehr nach außen verteilt ist als beim Druck auf die gerade Seite. Hierbei ist die Verformung mehr im Bereich

des gedrückten Rippenelements lokalisiert. Möglicherweise läßt sich aus diesen Beobachtungen die Folgerung ableiten, daß das unsymmetrische Schwingungsverhalten der Rippenplatte auf das unterschiedliche Wechselspiel bei der Energieumwandlung beim Vor- und Zurückschwingen zurückzuführen ist.

Als modernes hochempfindliches Meßverfahren wurde die interferometrische Impulsholographie benutzt, um in Erweiterung ursprünglicher Stoßversuche an isotropen Platten und orthotropen Platten konstanter Dicke (Walzbleche) die Durchbiegungsphasen zeitlich und örtlich (flächenhaft) auch bei Rippenplatten sichtbar zu machen. Dabei sollte nicht nur die unter dem Stoßpunkt auftretende zentrale Plattendurchbiegung im Frühstadium der Kontaktwechselwirkung exakt wiedergegeben werden, sondern auch die Ausbreitung der elastischen Biegewellen großflächig sichtbar gemacht werden. Hierbei interessieren vor allem deren richtungsabhängige Phasengeschwindigkeiten, die theoretisch bei solchen Strukturelementen nur mit größerem Aufwand berechenbar sind. Außerdem sollte der Versteifungseffekt der Rippen optisch wiedergegeben werden. Als Ergebnis konnte mit dieser Methode die zentrale Plattendurchbiegung aus der elektrischen Messung sehr gut bestätigt werden; allerdings nur für einen kleinen Bereich der Stoßparameter, denn für Stoßgeschwindigkeiten über O,375 m/s wäre die Interferenzstreifendichte zu hoch und das Verfahren bereits zu empfindlich. Die Versuche erlauben einen Vergleich zu isotropen Platten; dort hatte man zur Ermittlung des Durchbiegungsgebirges eine Schar konzentrischer Kreise. Hier ergaben sich mehr oder weniger elliptische Figuren mit symmetrischen Störungen, die Aufschluß über die Lage und den Effekt der Versteifungsrippen gaben. Es wurden richtungsabhängige Ausbreitungsgeschwindigkeiten der gerade noch sichtbaren Biegewellen ermittelt, die in Rippenrichtung deutlich größer als senkrecht dazu waren, was offensichtlich auf ein unterschiedliches Dispersionsverhalten in Rippenrichtung und quer dazu schließen läßt. Die zeitliche Änderung der Nullpunktsabstände in Bild 36 deutet auf anomale Dispersion hin, wonach sich die Biegewellen kürzerer Wellenlänge schneller ausbreiten als jene mit größerer Wellenlänge. Durch die Empfindlichkeit

der holographischen Methode wurde auch eine Eigentümlichkeit der verformten Platte unmittelbar unter der Stoßstelle sichtbar: Dort waren die Interferenzellipsen anders orientiert als das Streifensystem in einiger Entfernung vom Stoßpunkt, was den Einfluß des "Balkenelements" verdeutlicht.

10.7 Ausblick

Abschließend folgen einige Bemerkungen zu den Anwendungsgrenzen der vorgestellten Stoßtheorie der strukturierten Platten. Es hat sich gezeigt, daß bei großen Stoßmassen und -geschwindigkeiten Abweichungen zwischen theoretischen und gemessenen Belastungsgrößen auftreten. Dies ist sehr wahrscheinlich darauf zurückzuführen, daß hier mit dem Hertzschen Kontaktkraftgesetz gerechnet wurde, dessen Gültigkeit auf Fälle beschränkt ist, bei denen der Kontaktradius der Stoßpartner klein gegenüber den übrigen Körperabmessungen ist. Beim Stoß auf schmalere Rippen dürfte diese Bedingung nur begrenzt erfüllt sein. Daher sollte man ein neues Kontaktkraftgesetz entwickeln und dessen Parameter empirisch für spezielle Stoßfälle bestimmen. Bei orthotropen Platten konstanter Dicke, aber richtungsabhängiger Elastizitätsmoduli scheint dieses Problem der kleinen Kontaktfläche unerheblich zu sein. Da aber das Hertzsche Kontaktkraftgesetz nur für isotrope Stoffe gültig ist, müßte man auch ein neues Kontaktkraftgesetz für die Wechselwirkung zwischen einem isotropen und einem anisotropen Körper heranziehen.
Schließlich hat sich gezeigt, daß der gefundene proportionale Zusammenhang zwischen der Durchbiegung unter dem Stoßpunkt und dem Zeitintegral über die Stoßkraft nicht unmittelbar mit dem Stoß beginnt, sondern sich etwa nach 20 µs einstellt. Auch dies ist möglicherweise auf Nahfeldeinflüsse des "Balkenelements" am Stoßort zurückzuführen, die eingehend untersucht werden müßten. Auch sollte zur besseren Anpassung an die Wirklichkeit versucht werden, eine vereinfachte Biegestoßtheorie unter Berücksichtigung von Querkraftdeformation und Rotationsträgheit für den Fall zu entwickeln, bei dem der Torsionsparameter $\varkappa$ zur Bestimmung der effektiven Torsionssteifigkeit nicht mehr den Wert eins hat.

11. Schrifttum

/1/ Hoppmann, W.H.
Huffington, N.J.
Magness, L.S.
A Study of Orthogonally Stiffened Plates. J. Appl.Mech. Trans. ASME 78 (1956), 343-350

/2/ Troitskii, M.S.
Stiffened Plates. Bending,Stability and Vibrations. 1976 Elsevier, Amsterdam-Oxford-New York

/3/ Szilard, R.
Theory and Analysis of Plates. (Classical and Numerical Methods). 1974 Prentice-Hall, Inc.

/4/ Girkmann, K.
Flächentragwerke. 1978 Springer, Wien-New York

/5/ Leissa, A.W.
Vibration of Plates. 1969 NASA SP-160, Washington

/6/ Eringen, A.C.
Transverse Impact on Beams and Plates. J. Appl. Mech. 20 (1953), Nr. 4, 461-468

/7/ Schwieger, H.
Vereinfachte Theorie des elastischen Biegestoßes auf eine dünne Platte und ihre experimentelle Überprüfung. Forsch. Ing.-Wes. 41 (1975), Nr.4, 122-132

/8/ Schwieger, H.
Maximale Beanspruchung schlagartig belasteter elastischer Platten. DVL Forsch.-Ber. 66-33 (1966)

/9/ Laermann, K.-H.
Experimentelle Plattenuntersuchungen. 1972 Werner, Düsseldorf

/10/ Nádai, A.
Die elastischen Platten. 1968 Springer, Berlin

/11/ Hearmon, R.F.S.
Adams, E.H.
The Bending and Twisting of Anisotropic Plates. Brit.J.Appl.Physics (1952), Nr. 3, 150-156

/12/ Zener, C.
The Intrinsic Inelasticity of large Plates. Phys.Rev. 59(1941), Nr.2, 669-673

/13/ Geiger, H.
Scheel, K.
Handbuch der Physik, VI, Mechanik der elastischen Körper. 1928 Springer, Berlin

/14/ Lechnitskii, S.G.
Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body. 1963 Holden-Day, Inc., San Francisco

/15/ Schaefer, C.
Päsler, M.
Einführung in die theoretische Physik. 1970 Walter de Gruyter & Co., Berlin

/16/ Saada, A.S.
Elasticity: Theory and Applications. 1974 Pergamon Press Inc., New York

/17/ Klöppel, K.
Yamadá, M.
Anisotrope Fließbedingung. Der Stahlbau 29 (1960), Nr. 6, 173-179

/18/ Lehmann, Th.
Elemente der Mechanik I, Einführung. 1974 Bertelsmann, Düsseldorf

/19/ Hearmon, R.F.S.
The Frequency of Flexural Vibration of Rectangular Orthotropic Plates. J.Appl.Mech. 26(1959), 537-540

/20/ Boussinesq, J.N.
Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. 1885 Gauthier-Villars, Paris

/21/ Huber, M.T.
Die Theorie der kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten nebst Anwendung auf mehrere bautechnisch wichtige Aufgaben über rechteckige Platten. Der Bauingenieur 1923, Heft 12, 354-395

/22/ Huber, M.T. Über die Biegung einer rechteckigen Platte von ungleicher Biegungssteifigkeit in der Längs- und Querrichtung bei einspannungsfreier Stützung des Randes. Der Bauingenieur 1924, Heft 9, 259-311

/23/ Huber, M.T. Über die genaue Biegungsgleichung einer orthotropen Platte in ihrer Anwendung auf kreuzweise bewehrte Betonplatten. Der Bauingenieur 1925, Heft 30, 878-879

/24/ Spiegel, M.R. Allg. Mechanik, Theorie und Anwendung. 1979 McGraw-Hill, New York

/25/ Bronstein, I.N.
Semendjajew, K.A. Taschenbuch der Mathematik. 1973 Teubner. Leipzig

/26/ Gröbner, W.
Hofreiter, N. Integraltafel, Zweiter Teil, Bestimmte Integrale. 1973 Springer, Wien-New York

/27/ Dombrowski, H.
Schwieger, H. Vereinfachte Theorie des Biegestoßes auf einen Balken bei elastoplastischem Kontaktkraftgesetz. Fortschr.-Ber. VDI-Z., Reihe 1 (1980),Nr. 64

/28/ Dombrowski, H. Der Biegestoß auf eine dünne Platte bei elasto-plastischer Kontaktwechselwirkung. 1981 Diss. Ruhr-Universität Bochum

/29/ Zurmühl, R. Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. 1965 Springer, Berlin-New York

/30/ Bartsch, H.-J. Mathematische Formeln. 1970 VEB Fachbuchverlag, Leipzig

/31/ Sneddon, I.N. The Symmetrical Vibrations of a Thin Elastic Plate. Proc. Camb. Phil. Soc. 41 (1945), Nr. 1, 27-43

/32/ Schwieger, H.
Hahn, H.
Maximale Belastung und Energieumwandlung bei einem transversalen Stoß auf eine Kreisplatte. Fortschr.-Ber. VDI-Z, Reihe 1 (1977), Nr. 53

/33/ Dubbel
Taschenbuch für den Maschinenbau. 1970 Springer, Berlin - Heidelberg - New York

/34/ Schwieger, H.
Truppat, V.
Der zentrale Biegestoß auf einen beidseitig eingespannten Balken - Eine vereinfachte Theorie und ihre experimentelle Überprüfung. Fortschr.-Ber. VDI-Z. Reihe 1 (1976), Nr. 45

/35/ Schwieger, H.
Streubel, R.
Holographic Double Exposure Technique Applied to the Analysis of a Transversely Struck Plate. Proc. I.U.T.A.M. Symp. on Optical Methods in Mechanics of Solids, (1979), Poitiers (France)

/36/ Weber, H.
Herziger, G.
Laser, Grundlagen und Anwendungen. 1972 Physik-Verlag, Weinheim

/37/ Röss, D.
Laser, Lichtverstärker und Oszillatoren. 1966 Akad. Verlagsgesellschaft, Frankfurt/M.

/38/ Schwieger, H.
Streubel, R.
Die Verformungsanalyse schlagartig belasteter Glasplatten mit Hilfe des Moiré-Verfahrens, Forsch.Ing.Wes. 44 (1978), Nr. 6, 169-176

/39/ Françon, M.
Holographie. 1972 Springer, Berlin

/40/ Robertson, R.R.
Harvey, J.M.
The Engineering Using of Holography. 1970 At the University Press, Cambridge

/41/ Schumann, W.
Dubas, M.
Holographic Interferometry. 1979 Springer, Berlin - Heidelberg - New York

/42/ Synge, J.L.
Elastic Waves in Anisotropic Media. J. Math. and Phys. 35 (1957), 323-334

/43/ Buchwald, V.T.
Elastic Waves in Anisotropic Media. Proc. Roy. Soc. London 253 (1959), 563-580

/44/ Achenbach, J.D.
Wave Propagation in Elastic Solids. 1976 North-Holland Publ. Co. Amsterdam-New York - Oxford

/45/ Daniel, I.M.
Liber, T.
La Bedz, R.H.
Wave Propagation in Transversely Impacted Composite Laminates. Exp. Mech. 19(1979), Nr. 1, 9-16

/46/ Wolf, H.
Spannungsoptik. 1976 Springer, Berlin - Heidelberg - New York

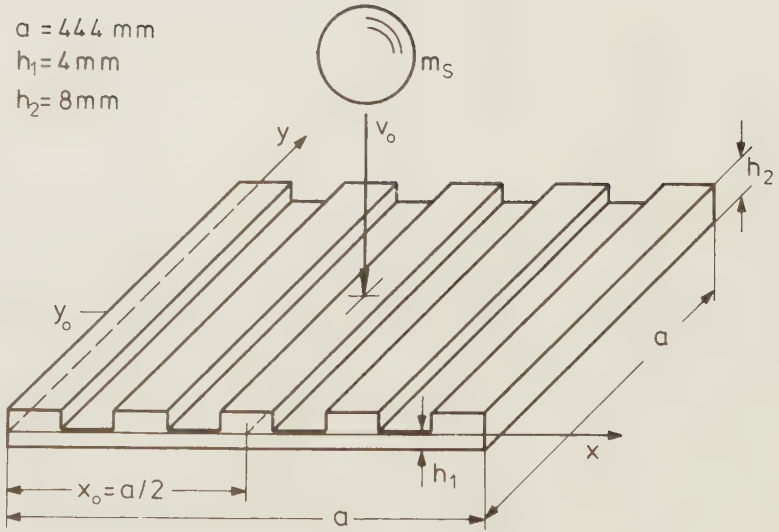


Bild 1 Schema des zentralen Biegestoßes auf eine Rippenplatte

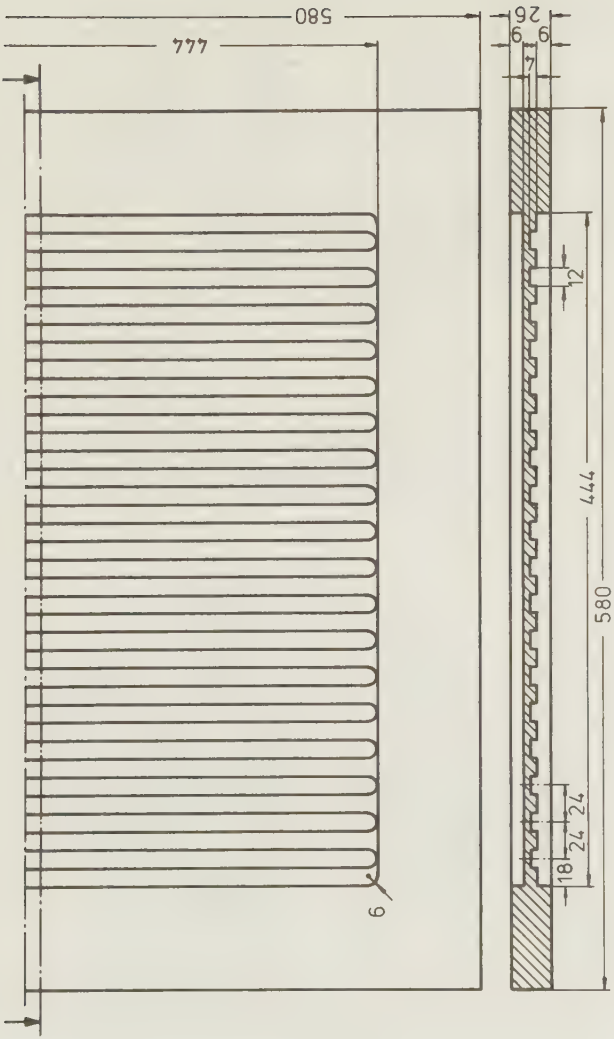


Bild 2 Plattengeometrie

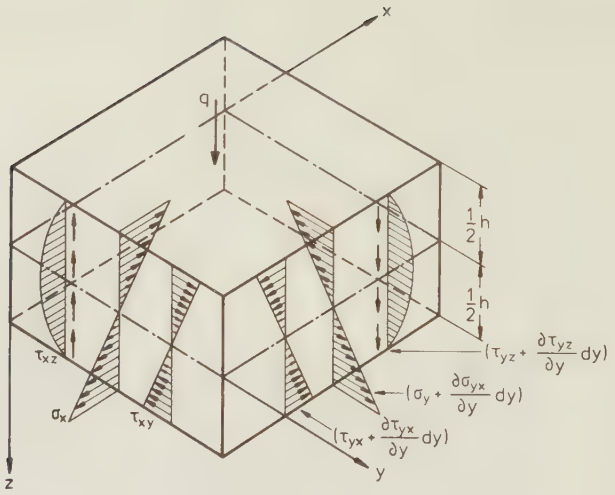


Bild 3 Spannungsverteilungen am Schnittelement
(An den gegenüberliegenden Flächen wurden diese der besseren Übersicht wegen weggelassen)

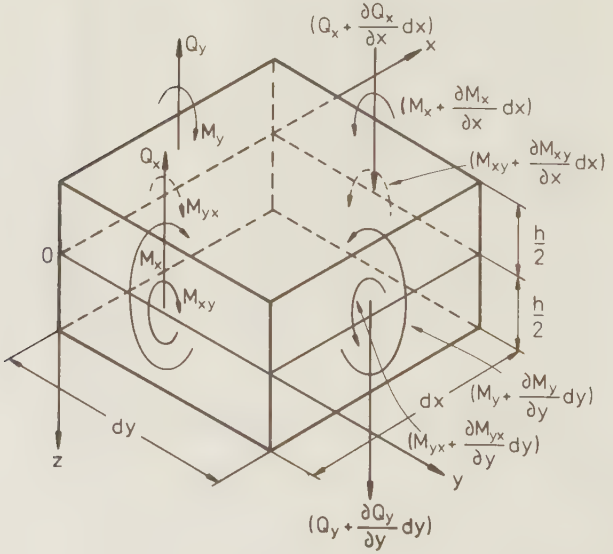


Bild 4 Momente am Schnittelement

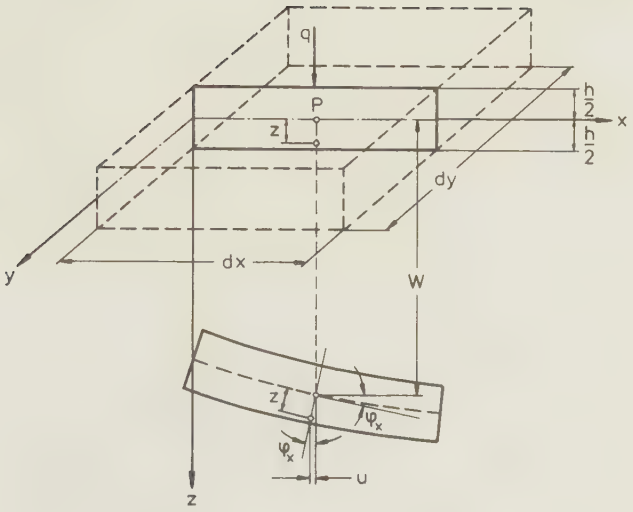


Bild 5 Verformung eines Plattenelements

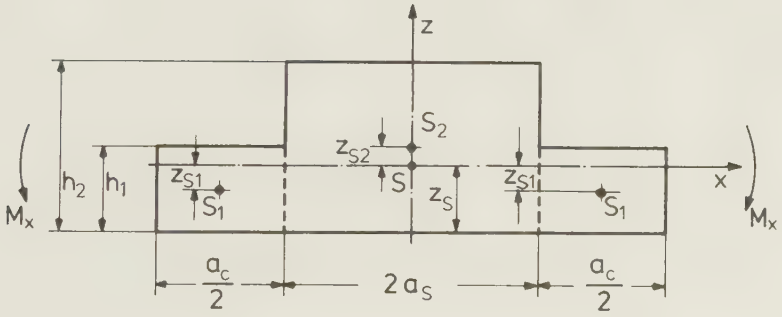


Bild 6 Zusammengesetztes Element einer Rippenplatte

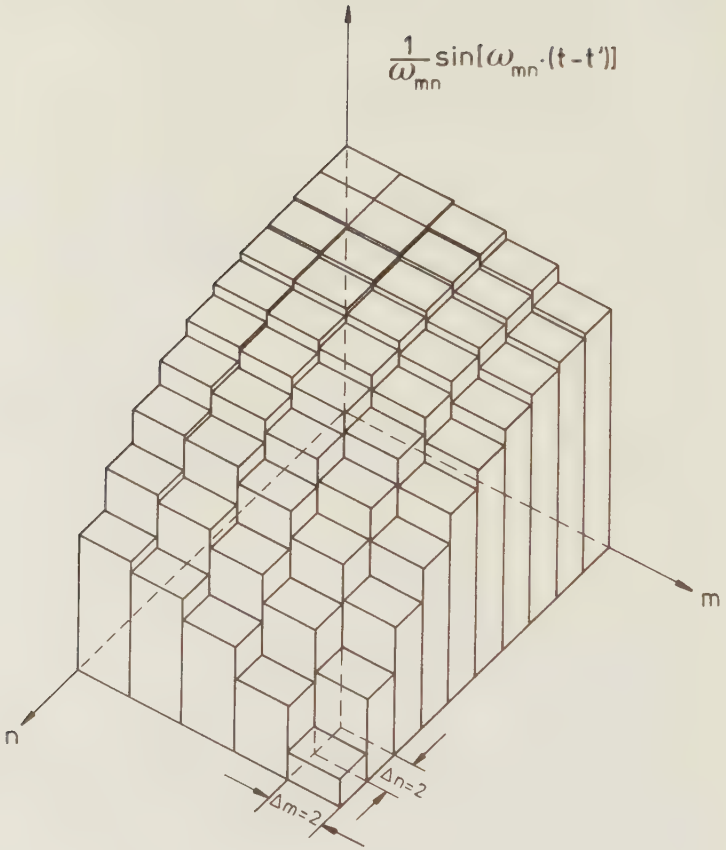


Bild 7 Glieder der unendlichen Reihe für die zentrale Plattendurchbiegung als Amplitudenwerte über der m,n-Ebene für (t-t') = const.

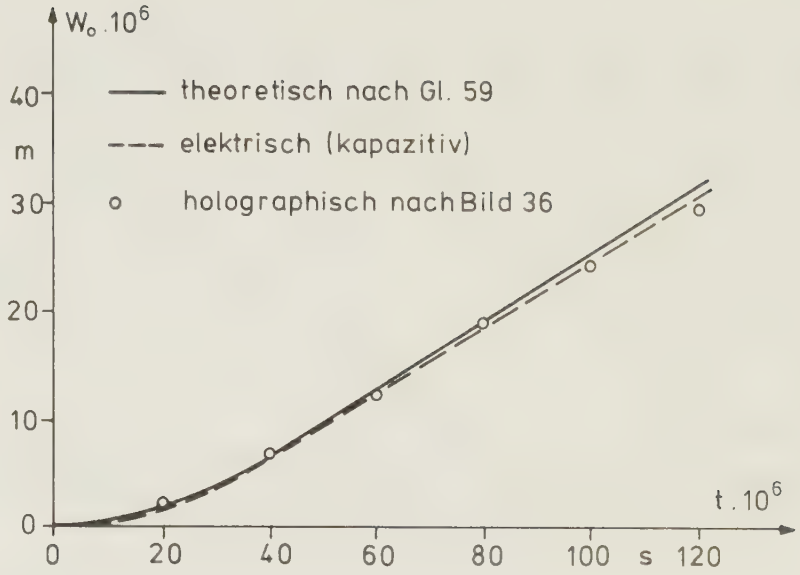


Bild 8 Zentrale Plattendurchbiegung als Funktion der Zeit
(v_o= 0,375 m/s; m_S= 0,58836 kg; Stoß auf Rippe)

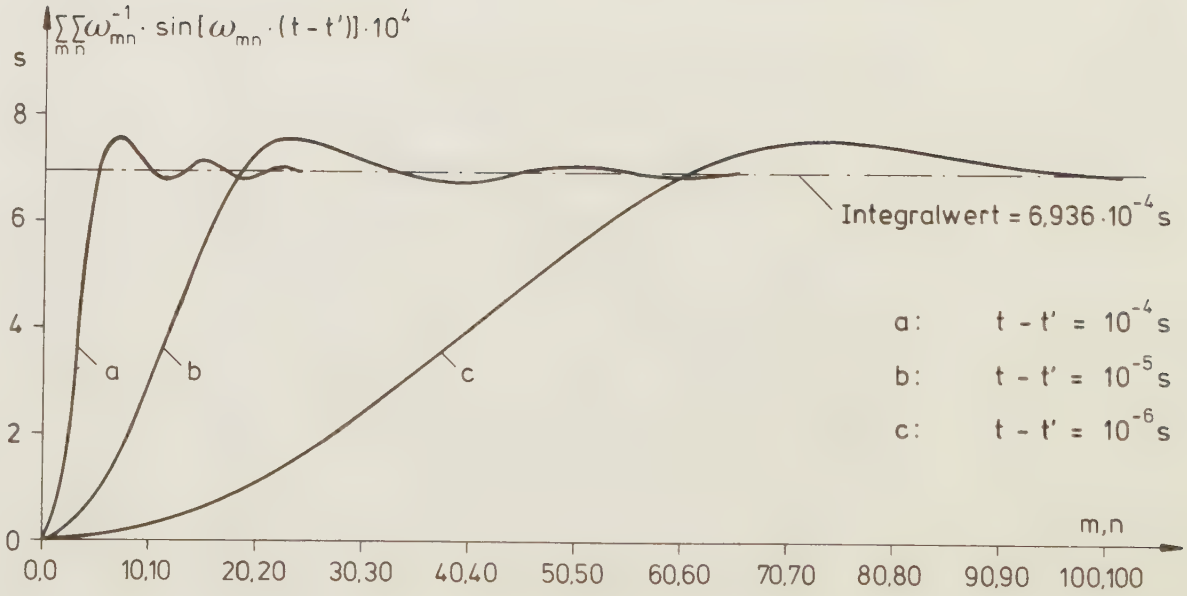


Bild 9 Vergleich der Summenwerte bei den hier gewählten Versuchsbedingungen für verschiedene Zeitdifferenzen (t-t') mit dem Integralwert

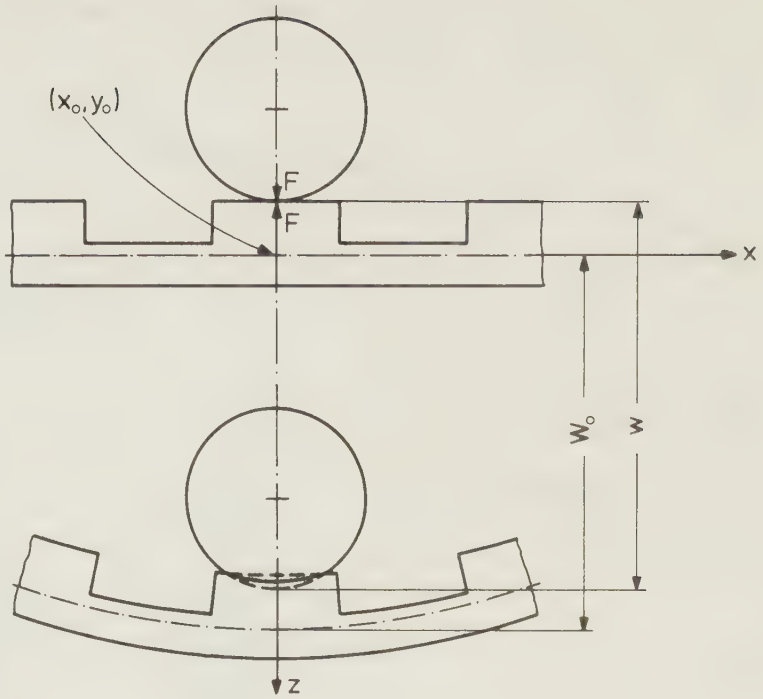


Bild 10 Annäherung $\delta = (w - W_o)$ der Massenschwerpunkte beider Stoßpartner

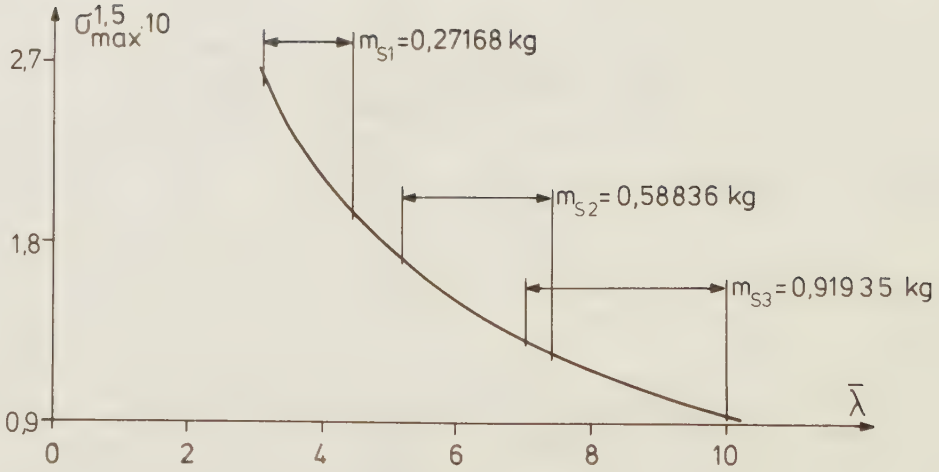


Bild 11 Maximale dimensionslose Stoßkraft $\sigma^{1,5}_{max}$ in Abhängigkeit von der Stoßkennzahl $\bar{\lambda}$. Die für die jeweiligen Stoßmassen eingetragenen Bereiche beziehen sich auf die benutzten Stoßgeschwindigkeitsbereiche

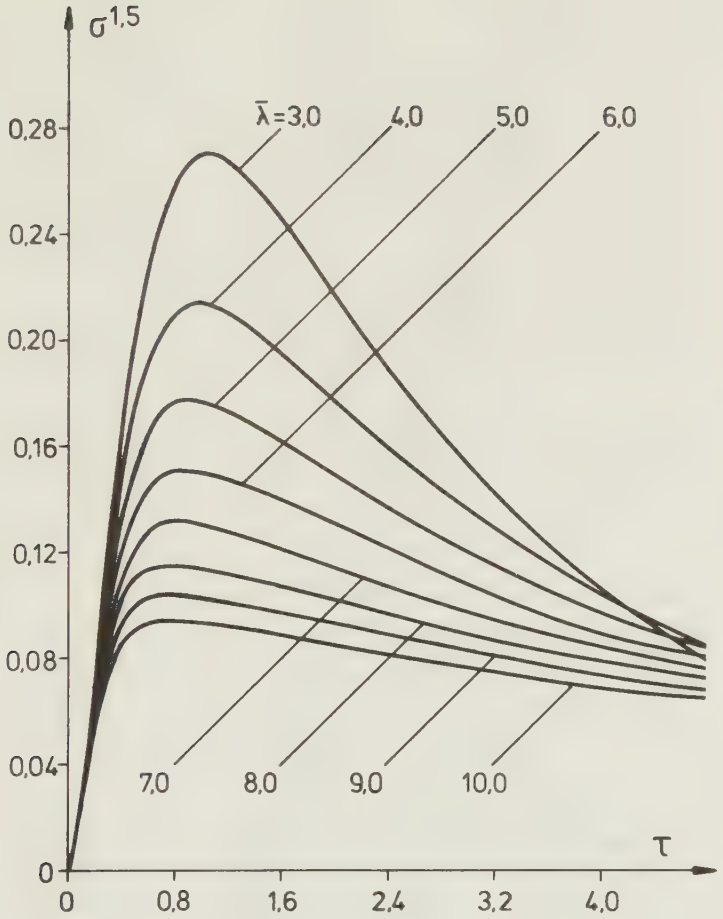


Bild 12 Dimensionslose Stoßkraft $\sigma^{1,5}$ als Funktion der dimensionslosen Zeitveränderlichen τ und der Stoßkennzahl $\bar{\lambda}$ nach /7/

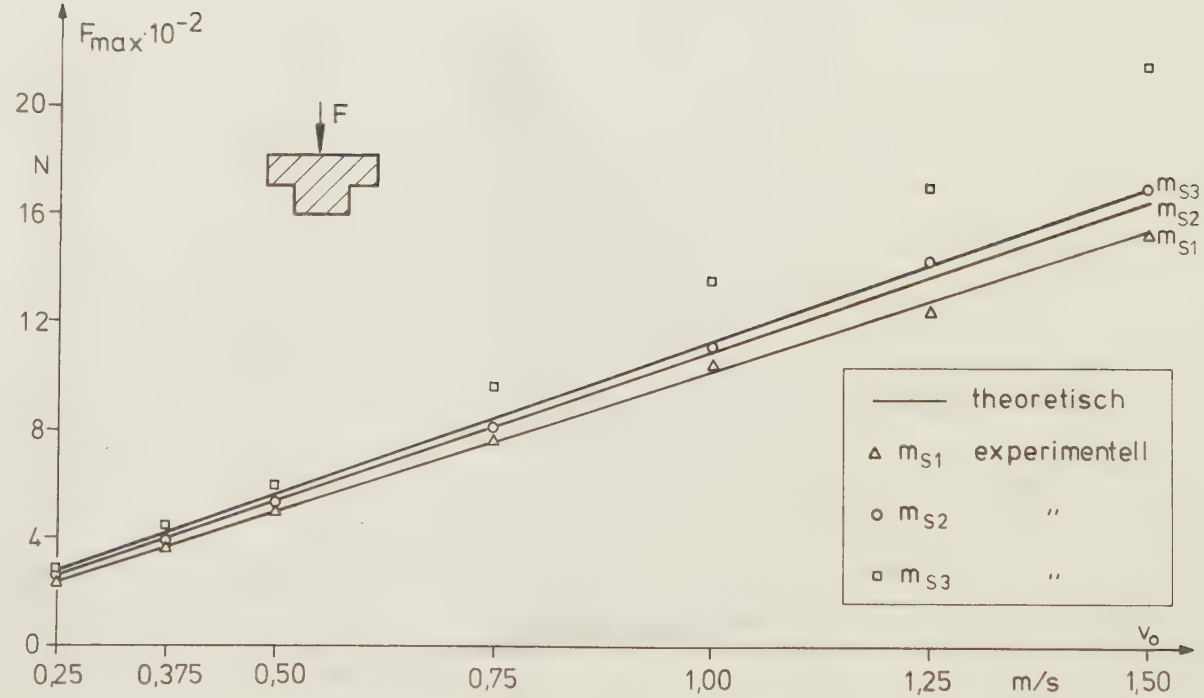
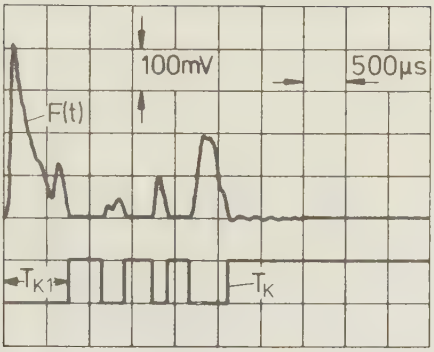
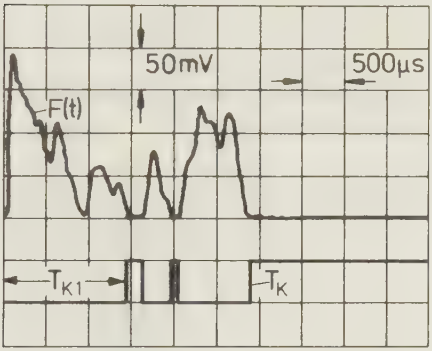


Bild 13 Maximale Stoßkraft F_{max} aus Rechnung und Experiment in Abhängigkeit von Stoßmasse m_S und Stoßgeschwindigkeit v_o (Stoß auf ebene Seite)

m_{S1} = 0,27168 kg
r_{S1} = 20,0 mm
v_O = 1,0 ms^{-1}



m_{S2} = 0,58836 kg
r_{S2} = 25,4 mm
v_O = 1,0 ms^{-1}



m_{S3} = 0,91935 kg
r_{S3} = 30,0 mm
v_O = 1,0 ms^{-1}

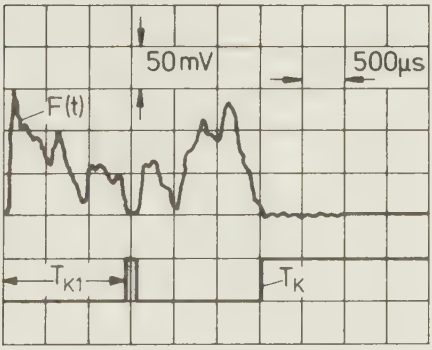


Bild 14 Kontaktwechselwirkung der Stoßpartner in Abhängigkeit von der Stoßmasse (Der Stoß erfolgte hierbei auf die ebene Seite)

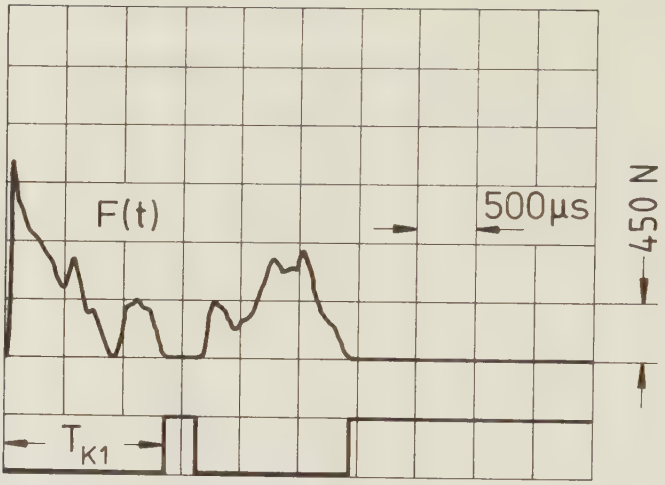


Bild 15 Beispiele von Stoßkraft- und Kontaktzeitaufzeichnungen (m_S = 0,91935 kg; v_o = 1,000 m/s)

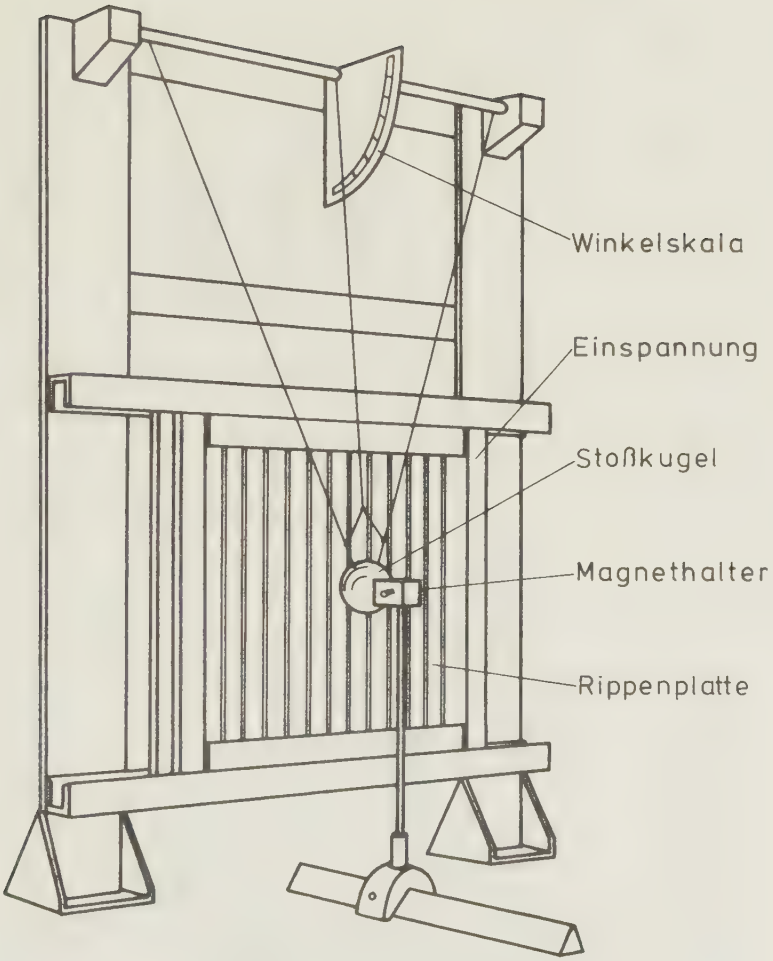


Bild 16 Schema der Versuchsanordnung

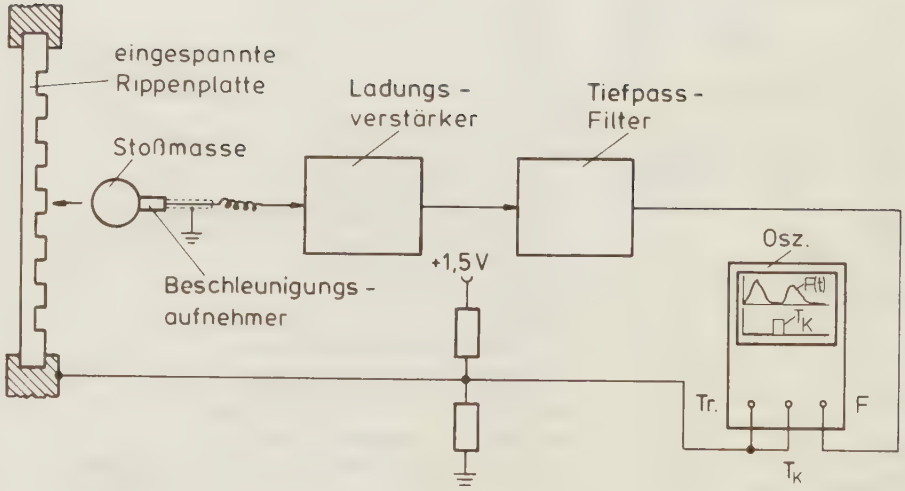


Bild 17 Anordnung zum Messen der Stoßkraft F(t) und der Kontaktzeit T_K

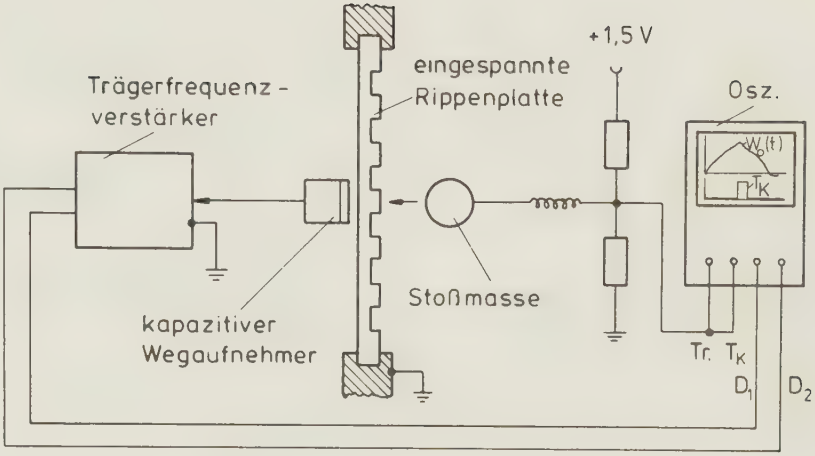


Bild 18 Anordnung zum Messen der zentralen Durchbiegung W_o mit der kapazitiven Methode und der Kontaktzeit T_K

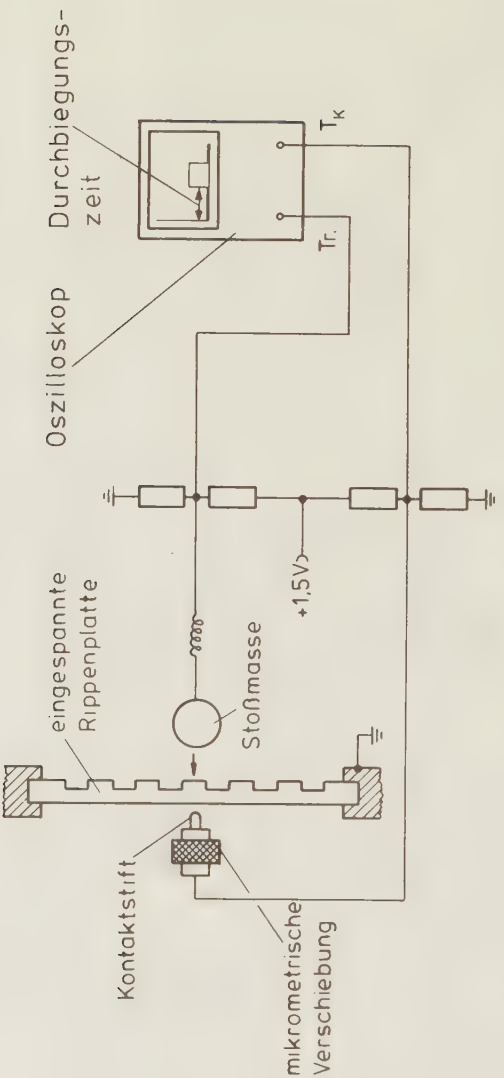


Bild 19 Anordnung zum Messen der zentralen Durchbiegung W_o mittels Kontaktstift

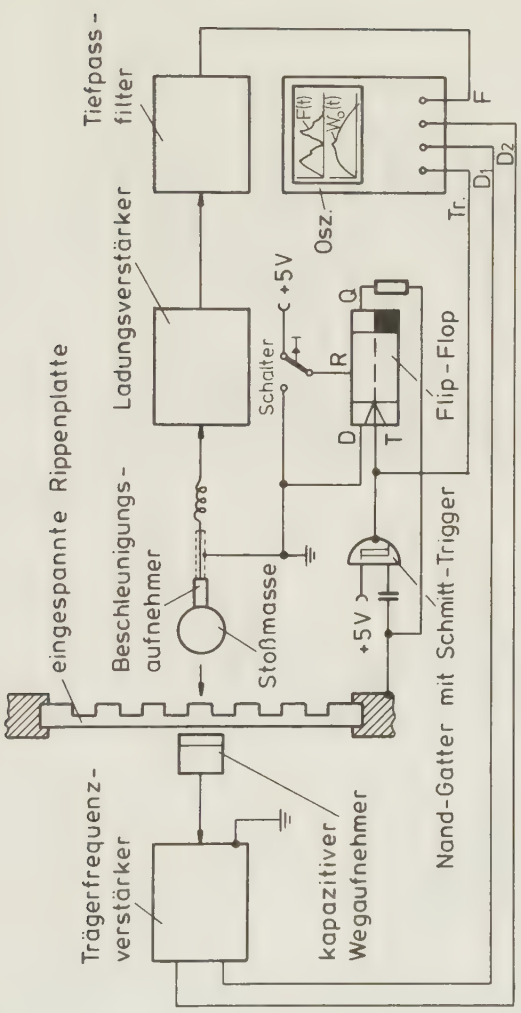


Bild 20 Anordnung zum gleichzeitigen Messen der Stoßkraft F(t) und der zentralen Durchbiegung $W_o(t)$

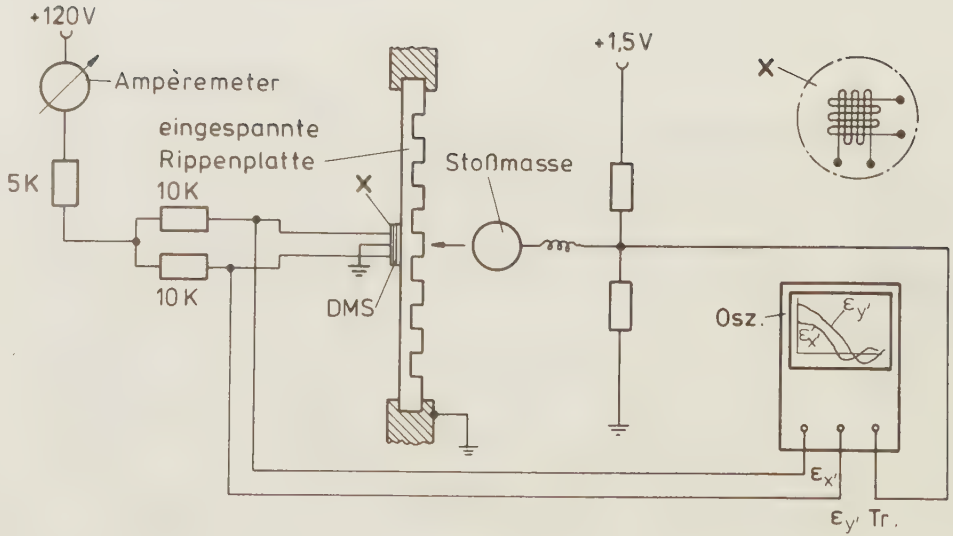


Bild 21 Anordnung zum gleichzeitigen Messen der orthogonalen Axialdehnungen $\varepsilon_{x'}$ und $\varepsilon_{y'}$

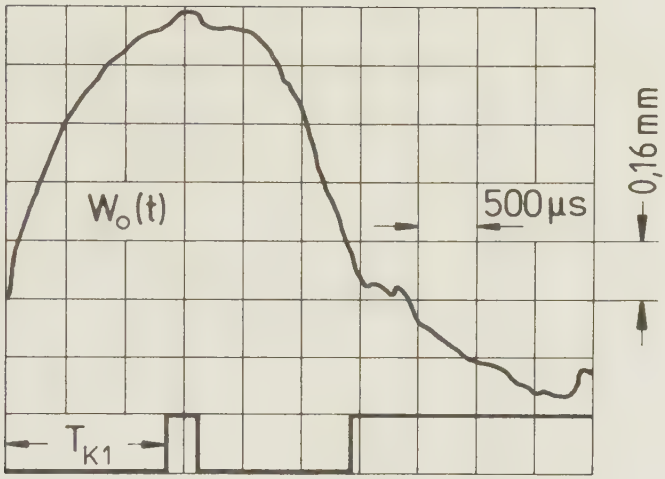


Bild 22 Beispiele von Durchbiegungs- und Kontaktzeitaufzeichnungen (m_S= 0,91935 kg; v_o= 1,000 m/s)

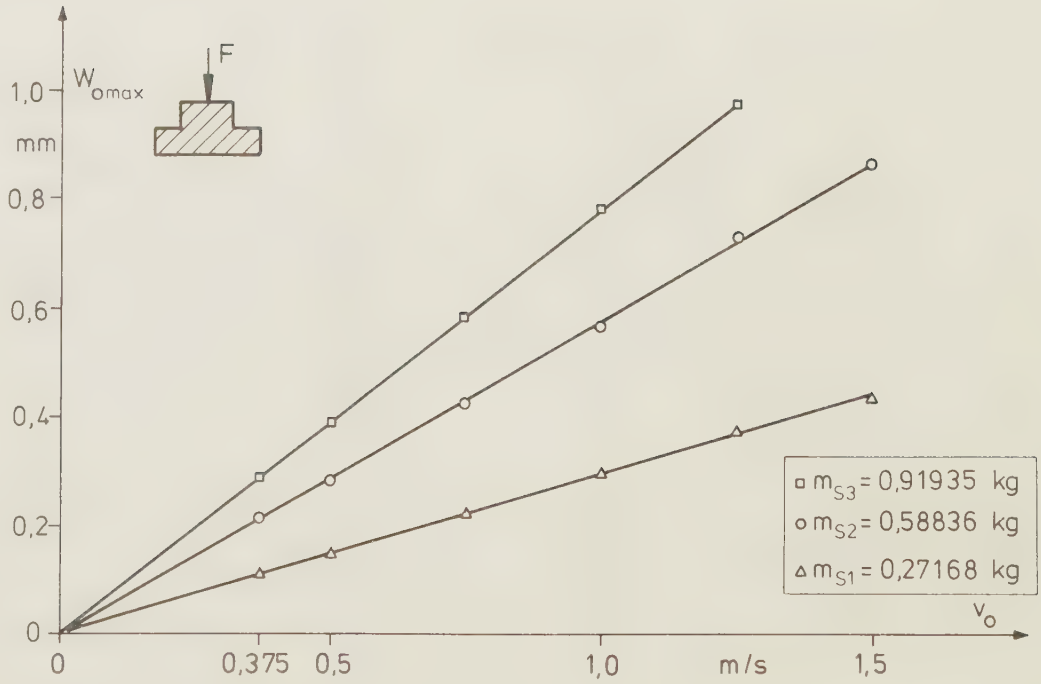


Bild 23 Maximale Plattendurchbiegung W_{omax} unter dem Stoßpunkt in Abhängigkeit von der Stoßgeschwindigkeit v_o und der Stoßmasse m_S (Stoß auf die mittlere Rippe)

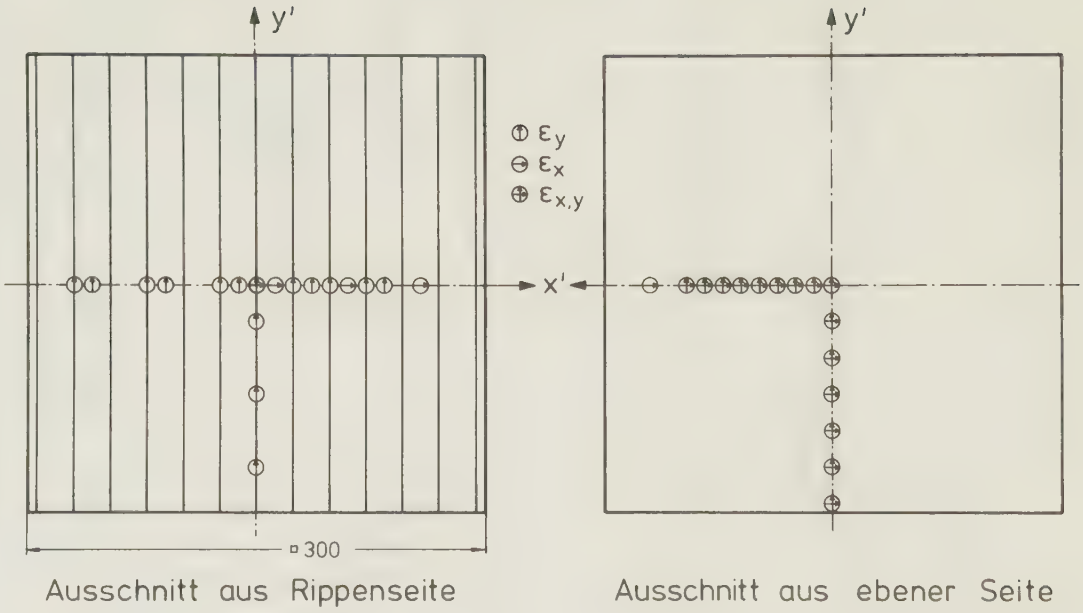


Bild 24 Meßstellenplan für die Dehnungsmeßstreifen mit Blick auf die Rippenseite und die ebene Seite ($x' = x - a/2$, $y' = y - a/2$)

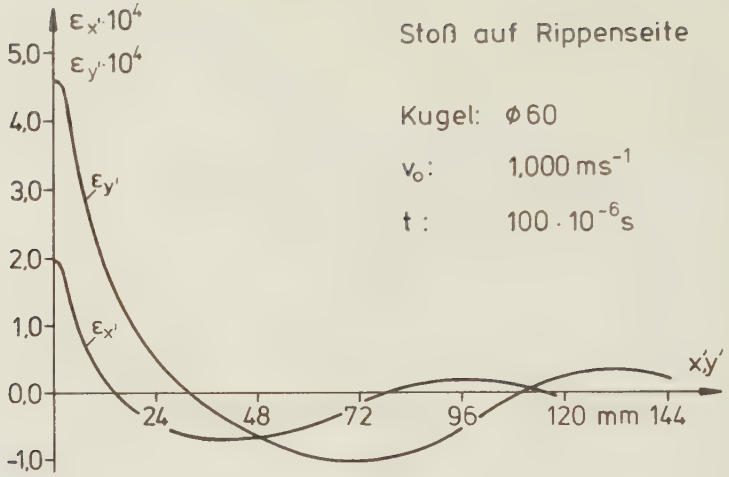


Bild 25 Beispiel einer Dehnungsverteilung auf der ebenen Seite längs der x- bzw. y-Koordinaten
(m_S= 0,91935 kg; v_o= 1 m/s; t = 100 µs)

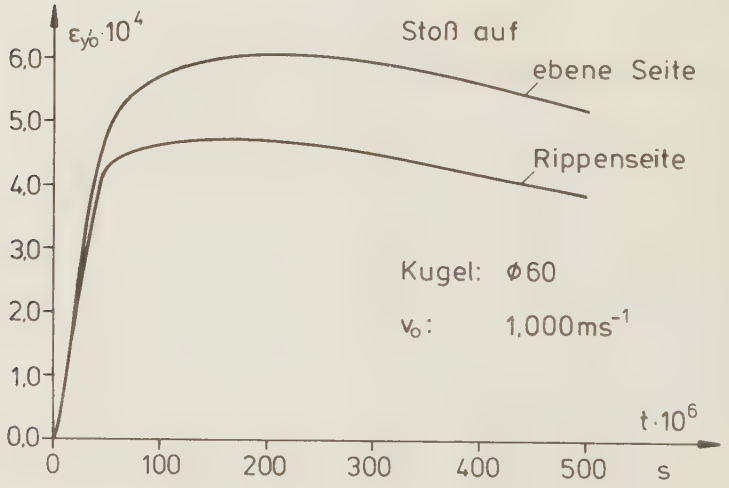


Bild 26 Aufzeichnungsbeispiele von zentralen Axialdehnungen an gegenüberliegenden Plattenseiten
(m_S= 0,91935 kg; v_o= 1 m/s)

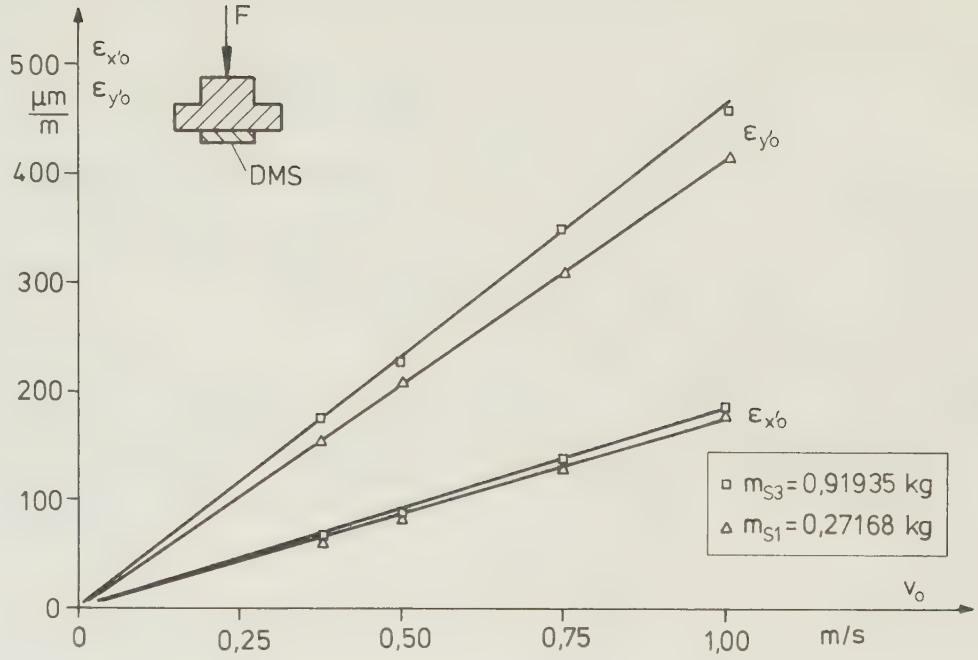
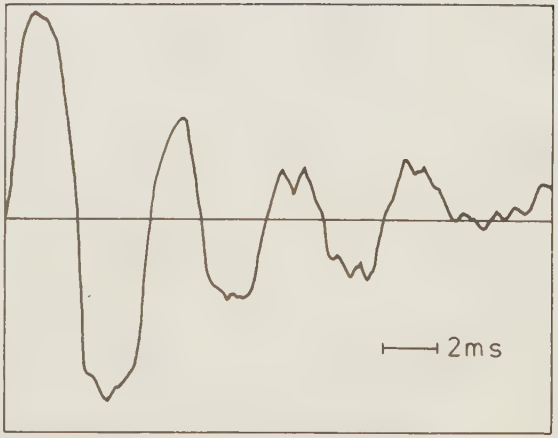
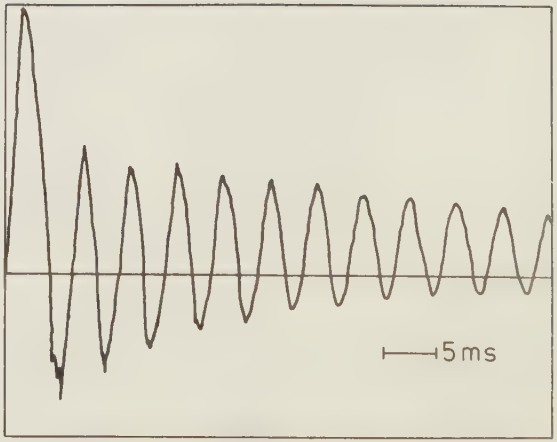


Bild 27 Maximale Axialdehnungen ε_{xb}, $\varepsilon_{y'o}$ unter dem Stoßpunkt in Abhängigkeit von der Stoßgeschwindigkeit v_o für verschiedene Stoßmassen m_S



(mittels kapazitiver Methode)



(mittels DMS)

Bild 28 Aufzeichnungsbeispiele der Grundeigenfrequenz

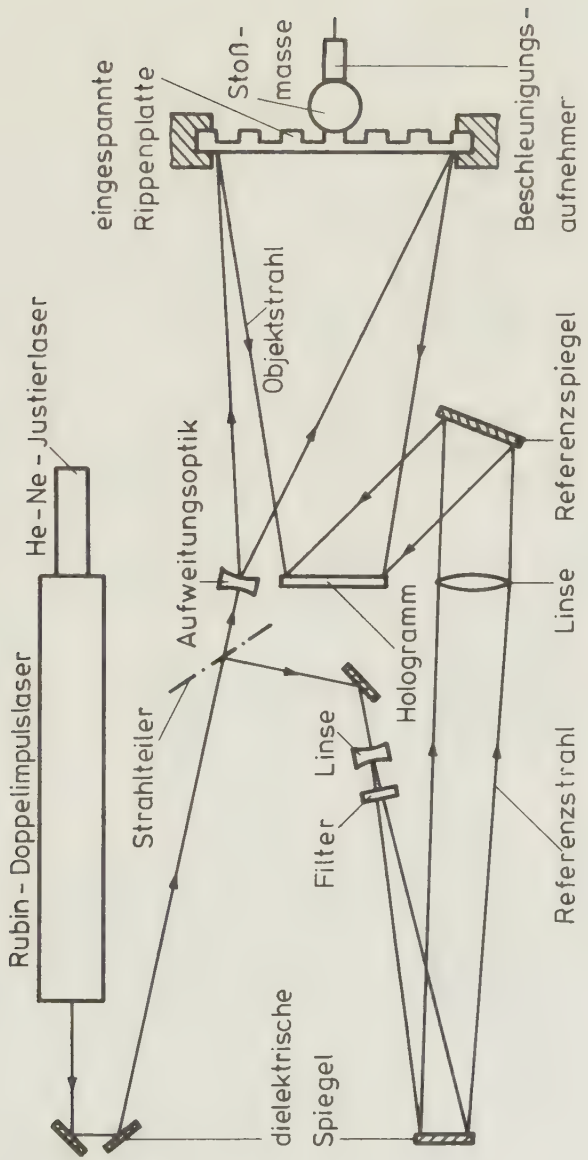


Bild 29 Holographischer Aufbau (Holokamera) für die interferenzoptische Untersuchung des zentralen Biegestoßes auf eine Rippenplatte

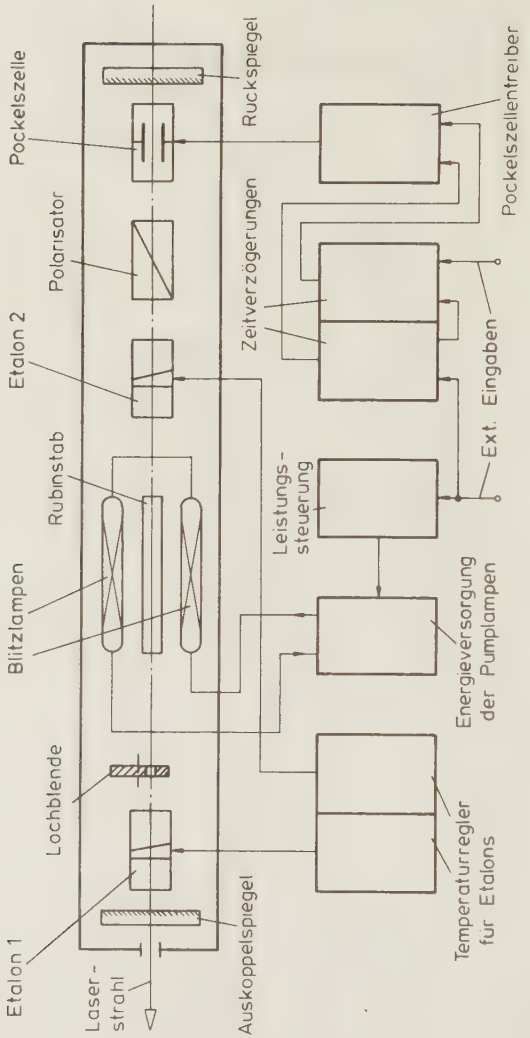


Bild 30 Schematischer Aufbau des benutzten Rubin-Doppelimpulslasers

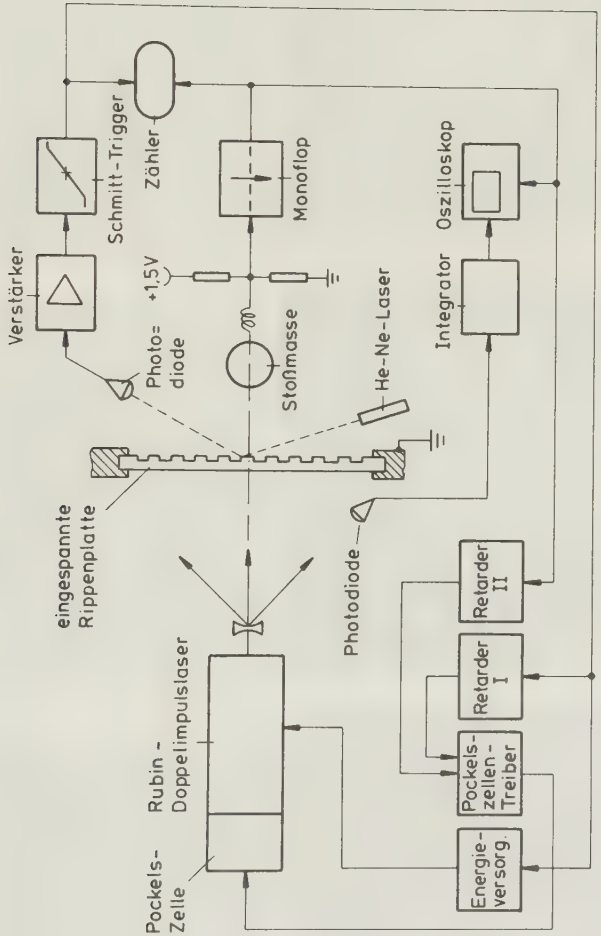


Bild 31 Steuerung des benutzten Doppelimpulslasers

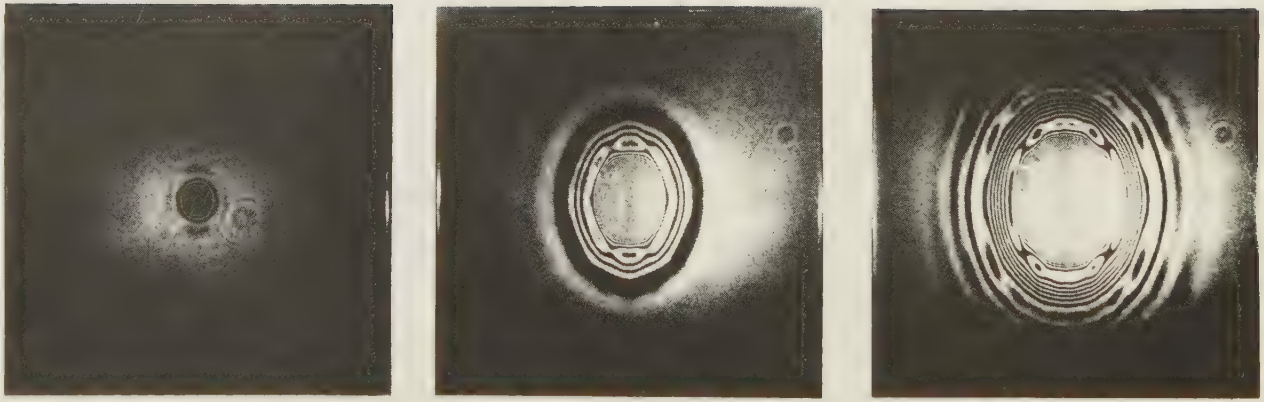


Bild 32 Ausbreitungsphasen des Biegezustandes einer transversal gestoßenen Rippenplatte (Beispiele aus einer Versuchsreihe mit v_o = 0,375 m/s und m_S = 0,58836 kg. Stoß auf Rippenseite, Verformungsaufnahme von der ebenen Seite)

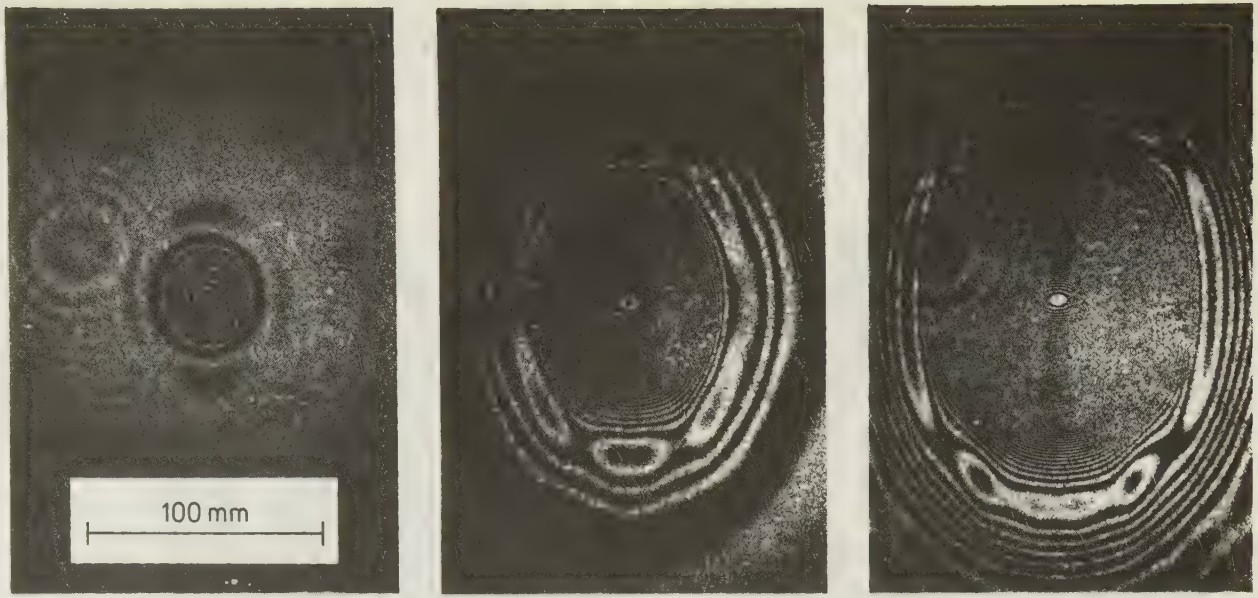


Bild 33 Vergrößerte Abbildungen des Zentralbereichs durch Teleobjektiv-Rekonstruktionen (Aufnahmebeispiele wie in Bild 32)

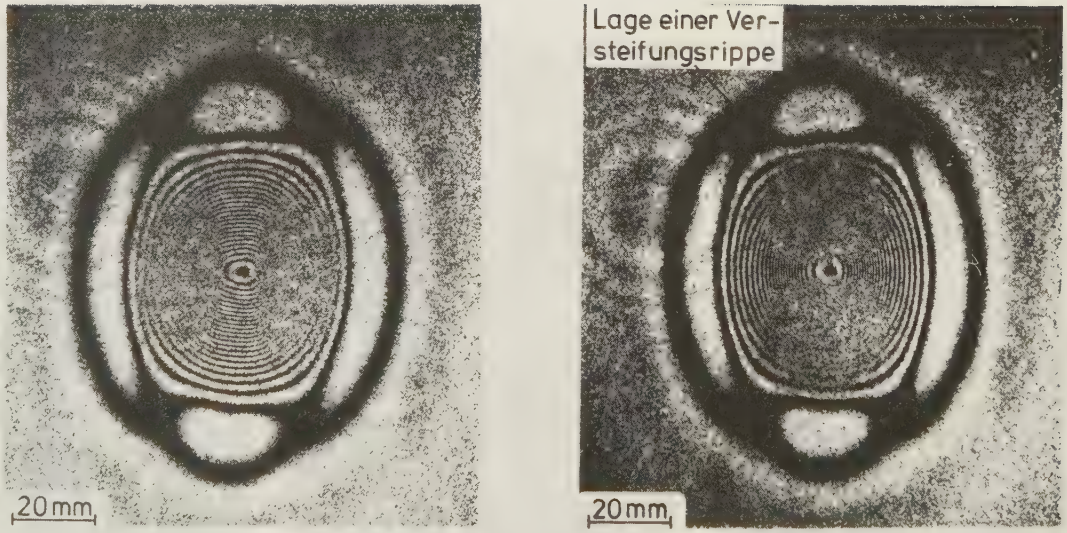


Bild 34 Gegenüberstellung zweier Rekonstruktionen für den Stoß auf die Rippenseite (Vertikale und horizontale Scharfstellung der Kamera, Momentaufnahmen bei t = 40 µs. Die Lage der Versteifungsrippen wird besonders in holographisch empfindlichen Gebieten, d.h. bei kleinen Durchbiegungsgradienten, sichtbar)

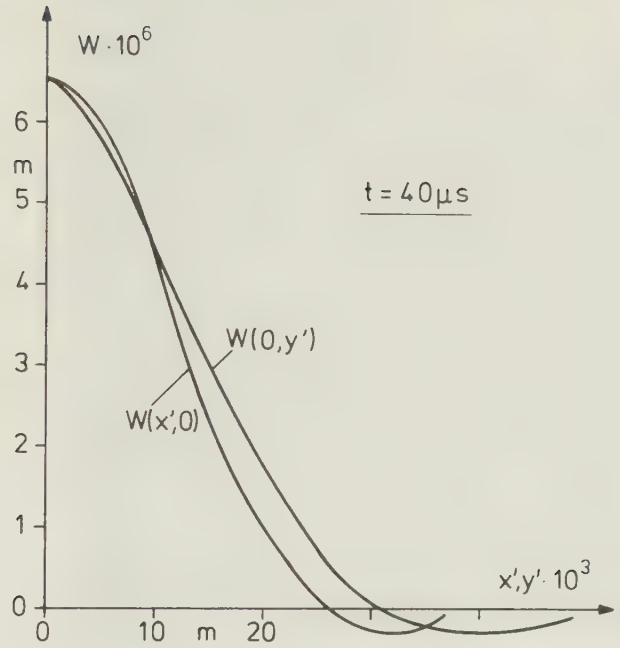


Bild 35 Auswertung der Interferenzstreifen in Bild 34 zur Ermittlung des örtlichen Durchbiegungsverlaufs $W(x'=0,\ y'\neq 0)$ bzw. $W(x'\neq 0,\ y'=0)$

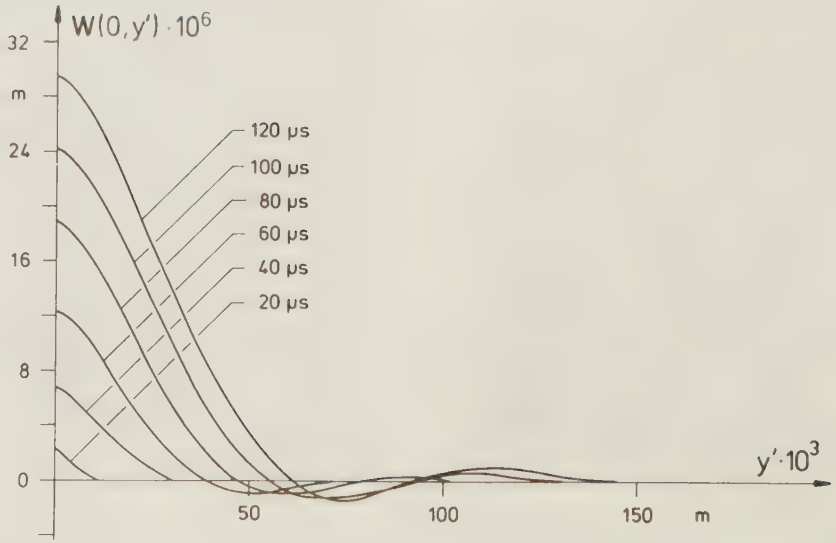


Bild 36 Örtliche Verteilung der Plattendurchbiegung zu verschiedenen Zeiten nach Stoßbeginn (v_o= 0,375 m/s; m_S= 0,58836 kg; Stoß auf Rippe)

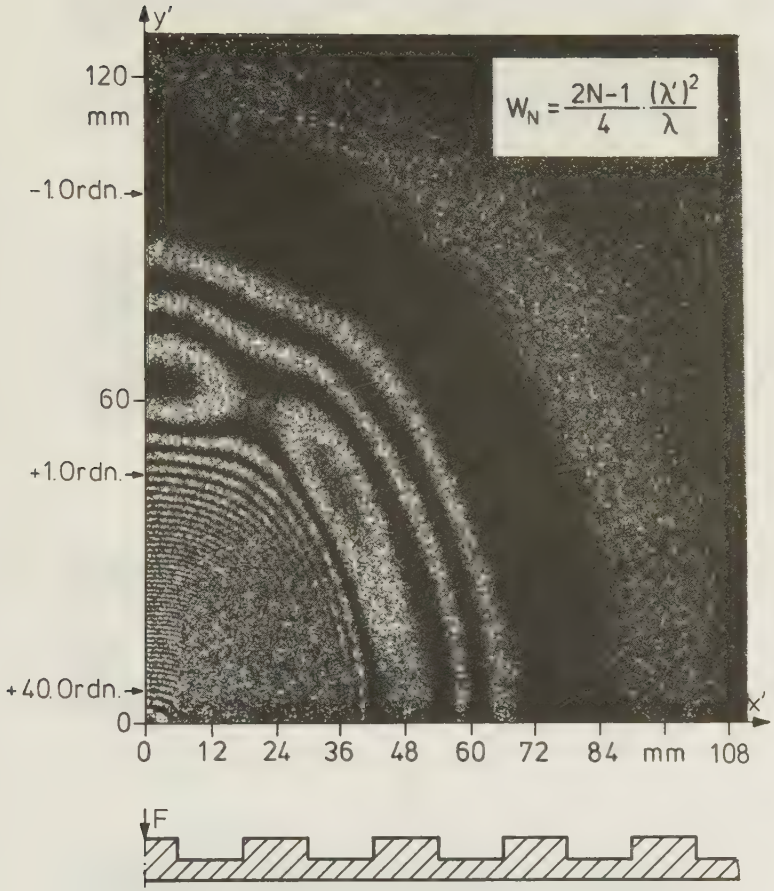


Bild 37 Zuordnung zwischen Interferenzstreifenlage und Plattengeometrie (t = 60 µs; Stoß auf Rippe)

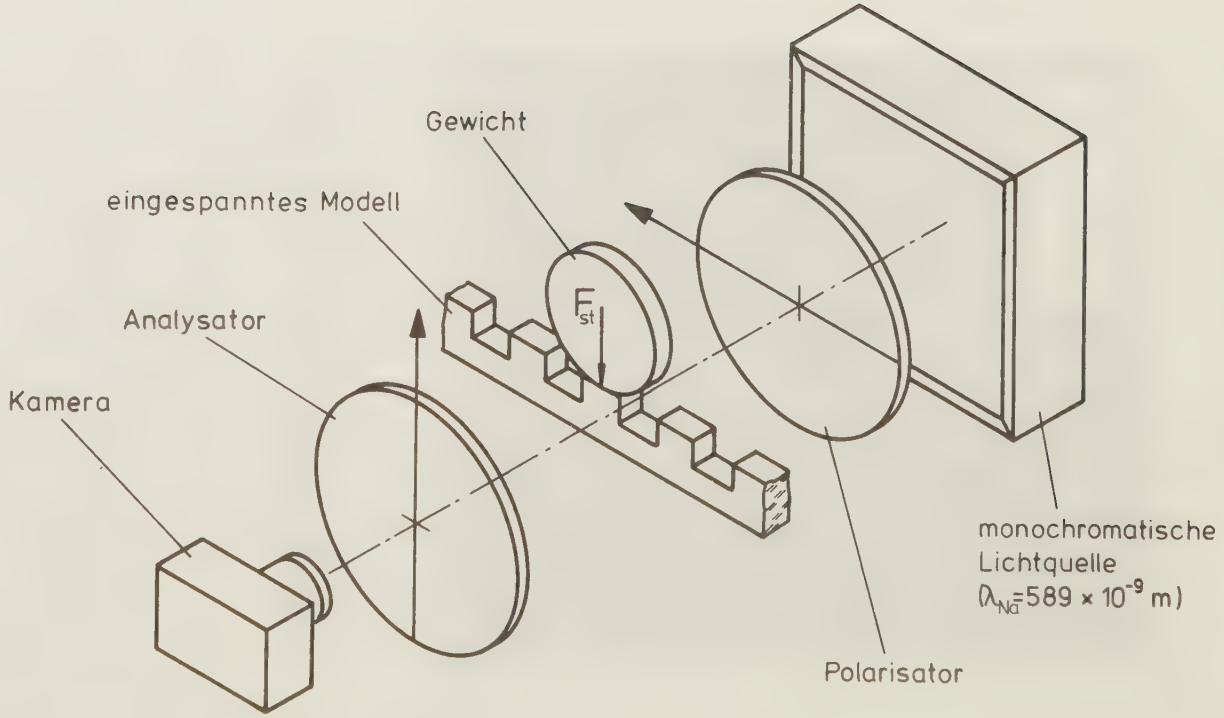
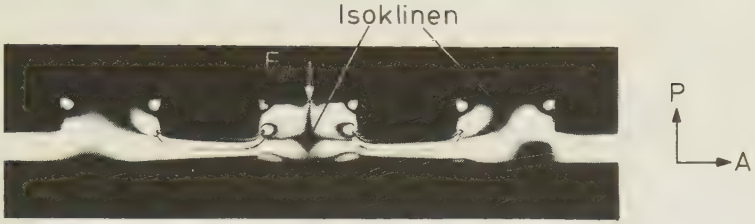
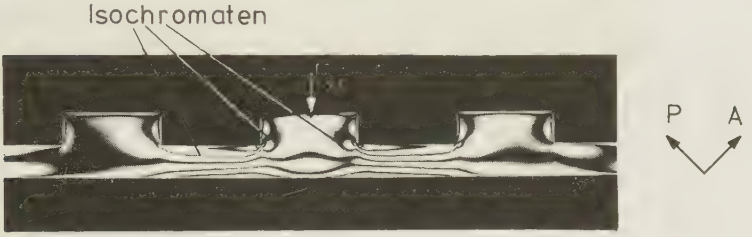


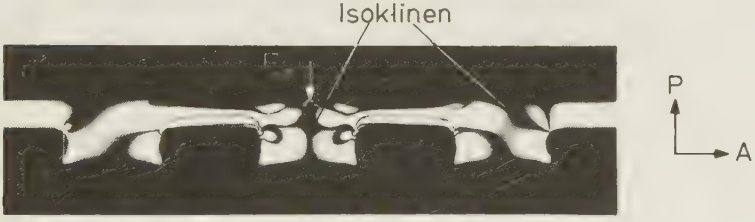
Bild 38 Spannungsoptischer Versuchsaufbau: Rippenbalken aus Epoxydharz im Linearpolariskop (monochromatisches Licht, $\lambda_{Na} = 589 \cdot 10^{-9}$ m)



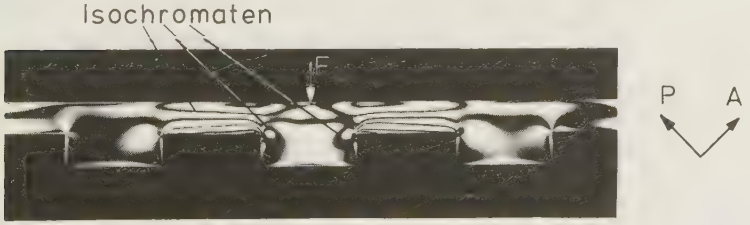
(a) Krafteinleitung in die mittlere Rippe



(b) Krafteinleitung in die mittlere Rippe



(c) Krafteinleitung in die Mitte der geraden Seite



(d) Krafteinleitung in die Mitte der geraden Seite

Bild 39 Spannungsoptische Aufnahmen eines belasteten Rippenbalkens aus Epoxydharz bei verschiedenen Stellungen des Polarisationskreuzes und unterschiedlichen Lastangriffspunkten

Stoßgeschwindigkeit v_o	Referenzzeit $T_R \cdot 10^5$	Stoßkennzahl $\bar{\lambda}$	max. dimensionslose Stoßkraft $\sigma^{1,5}_{max}$	max. Stoßkraft F_{max}
0,250 m/s	7,38256 s	3,09884	0,26344	242,37 N
0,375 m/s	6,80752 s	3,36060	0,24712	369,84 N
0,500 m/s	6,42689 s	3,55963	0,23624	499,32 N
0,750 m/s	5,92629 s	3,86032	0,22048	758,06 N
1,000 m/s	5,59493 s	4,08894	0,21000	1019,72 N
1,250 m/s	5,35073 s	4,27556	0,20664	1286,40 N
1,500 m/s	5,15953 s	4,43434	0,19656	1545,04 N

Tabelle 1 Maximale Stoßkraft F_{max} für die Stoßmasse m_{S1}=0,27168 kg

Stoßgeschwindigkeit v_o	Referenzzeit $T_R \cdot 10^5$	Stoßkennzahl $\bar{\lambda}$	max. dimensionslose Stoßkraft $\sigma_{max}^{1,5}$	max.Stoßkraft F_{max}
0,250 m/s	9,58692 s	5,16788	0,17244	264,57 N
0,375 m/s	8,84018 s	5,60441	0,16096	401,73 N
0,500 m/s	8,34590 s	5,93633	0,15316	539,86 N
0,750 m/s	7,69582 s	6,43778	0,14220	815,36 N
1,000 m/s	7,26553 s	6,81905	0,13490	1092,42 N
1,250 m/s	6,94841 s	7,13027	0,12962	1371,96 N
1,500 m/s	6,69960 s	7,39507	0,12548	1652,95 N

Tabelle 2 Maximale Stoßkraft F_{max} für die Stoßmasse m_{S2}=0,58836 kg

Stoßgeschwindigkeit v_o	Referenzzeit $T_R \cdot 10^5$	Stoßkennzahl $\bar{\lambda}$	max. dimensionslose Stoßkraft $\sigma_{max}^{1,5}$	max. Stoßkraft F_{max}
0,250 m/s	11,08548 s	6,98352	0,13182	273,31 N
0,375 m/s	10,22201 s	7,57343	0,12280	414,17 N
0,500 m/s	9,65047 s	8,02196	0,11636	554,25 N
0,750 m/s	8,89878 s	8,69959	0,10816	838,07 N
1,000 m/s	8,40122 s	9,21482	0,10256	1122,32 N
1,250 m/s	8,03453 s	9,63537	0,09840	1407,43 N
1,500 m/s	7,74683 s	9,99321	0,09490	1689,33 N

Tabelle 3 Maximale Stoßkraft F_{max} für die Stoßmasse m_{S3}=0,91935 kg

Stoßgeschwindigkeit v_o	Zeit $t \cdot 10^6$	Zentrale Durchbiegung $(W_o)_{exp} \cdot 10^6$	Impuls $\int F dt \cdot 10^2$	Plattenparameter $\alpha_{exp} \cdot 10^4$
0,250 m/s	80 s	14,072 m	1,672 Ns	8,416 m/Ns
0,250 m/s	100 s	19,349 m	2,217 Ns	8,728 m/Ns
0,250 m/s	120 s	24,626 m	2,738 Ns	8,994 m/Ns
0,500 m/s	80 s	29,903 m	3,354 Ns	8,916 m/Ns
0,500 m/s	100 s	38,698 m	4,386 Ns	8,824 m/Ns
0,500 m/s	120 s	47,493 m	5,365 Ns	8,852 m/Ns
0,750 m/s	80 s	42,216 m	5,075 Ns	8,318 m/Ns
0,750 m/s	100 s	56,288 m	6,575 Ns	8,561 m/Ns
0,750 m/s	120 s	68,601 m	8,005 Ns	8,570 m/Ns

Tabelle 4 Experimentell ermittelter Plattenparameter α_{exp}
(Stoßmasse: m_{S2}=0,58836 kg)

Lebenslauf

Name	Streubel	
Vorname	Ernst Reinhard	
geboren	18. Oktober 1948	
in	Burkhardtsdorf	
Eltern	Kaufmann Rudolf Streubel und Ehefrau Johanne, geb. Mauersberger	
Familienstand	verheiratet	
Schulen	1955 - 1959	Volksschule
	1959 - 1968	Gymnasium
Abitur	27.05. 1968	Mercator-Gymnasium, Duisburg
Wehrdienst	1968 - 1970	Offizierslaufbahn, Funker
Industriepraktikum	1970	Mannesmann-Werke, Mülheim/Ruhr
Studium	1970 - 1976	Maschinenbau, Ruhr-Universität Bochum
Abschluß	10.05. 1976	Diplomingenieur
Berufl. Tätigkeit	1976 - 1982	wiss.Assistent am Institut für Mechanik (Experimentelle Mechanik) der Ruhr-Universität Bochum

DER DRUCKER · (Alte) Buscheystraße 138 · 4630 Bochum 1 · Telefon (0234) 70 41 16